



## Kuglearmerede og porøse materialer under volumetriske påvirkninger

Nielsen, Lauge Fuglsang

*Publication date:*  
1995

*Document Version*  
Også kaldet Forlagets PDF

[Link back to DTU Orbit](#)

*Citation (APA):*  
Nielsen, L. F. (1995). *Kuglearmerede og porøse materialer under volumetriske påvirkninger*. Technical University of Denmark, Department of Civil Engineering.

---

### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

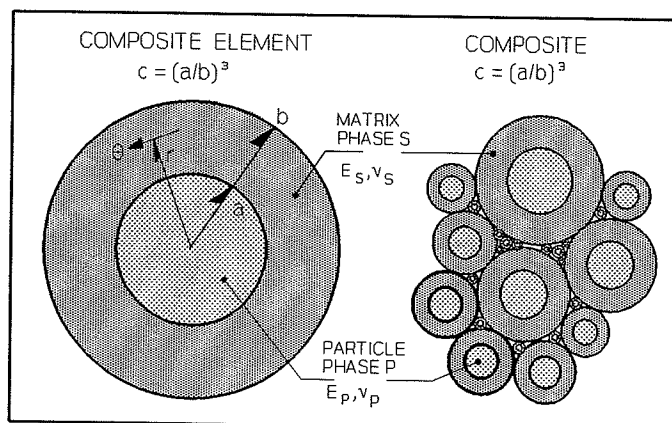
If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

# Kuglearmerede og porøse materialer

---

## *under volumetriske påvirkninger*

Lauge Fuglsang Nielsen

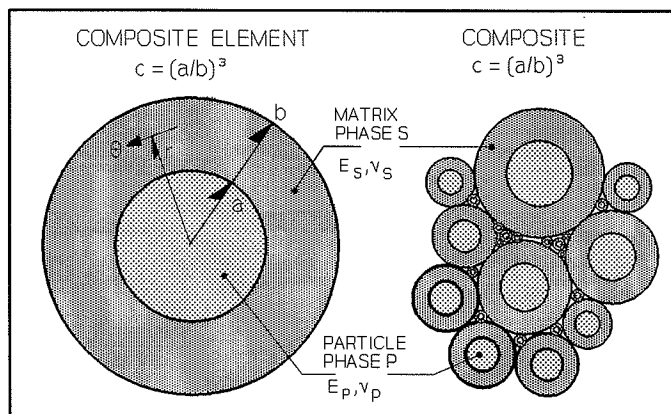


# Kuglearmerede og porøse materialer

---

*under volumetriske påvirkninger*

Lauge Fuglsang Nielsen



# **Kuglearmerede og porøse materialer**

---

**under volumetriske påvirkninger**

**LAUGE FUGLSANG NIELSEN**

**BUILDING MATERIALS LABORATORY - TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK  
DK-2800 LYNGBY - DENMARK**

# Indhold

Forord . . . . .	3
Introduktion . . . . .	4
Materialemodel . . . . .	4
Betegnelser og symboler . . . . .	4
Porøst materiale . . . . .	5
Udvendig og indvendig last . . . . .	5
Poretryk alene . . . . .	6
Kompositmateriale . . . . .	7
Spændingstilstand . . . . .	7
Komposittøjning og -stivhed . . . . .	8
Stivhedsgrænser . . . . .	8
Egenspænding/tøjnings-problemer . . . . .	9
Egentøjning i matrix alene . . . . .	10
Slutbemærkninger . . . . .	11
Litteratur . . . . .	11

# Forord

En række udtryk udvikles i denne rapport til anvendelse i spændings-tøjningsanalyser af isotrope elastiske partikelarmerede (herunder porøse) materialer under volumetriske påvirkninger som for eksempel ydre hydrostatisk last, indre poretryk og egentøjninger i kompositmaterialets faser. Hygro-termiske bevægelser fra svind og temperatur er typiske egentøjningspåvirkninger. De præsenterede udtryk er illustrerede i figurer med materialeparametre, der er relevante for mørtel og beton.

Den anvendte materialemodel er den såkaldte kuglemodel. Det er en tæt pakning af kongruente kugleformede kompositelementer, hvor kugleformede partikler er omgivet af en koncentrisk matrixskal således at partikelkoncentrationen lokalt er den samme som kompositmateriales totale gennemsnitlige partikelkoncentration.

Det diskuteres kort i et afsluttende afsnit, hvordan de opnåede resultater kan nyttiggøres i analyser af kompositmaterialer, der som for eksempel beton, ikke er elastiske men viskoelastiske.

Primært er rapporten et undervisningsnotat til anvendelse i forfatterens kursus (6110) i Materialemechanik ved Laboratoriet for Bygningsmaterialer, Danmarks tekniske Universitet. Som grundlag for diskussioner og øvelser i forelæsningserne er teksten holdt på det helt nødtørftige plan.

Rapporten udgør imidlertid også et af de beregningsmæssige udgangspunkter i laboratoriets løbende forskning på beton og lignende kompositmaterialers holdbarhed med hensyn til for eksempel svind-, frost- og temperaturpåvirkninger samt tilslagsexpansion.

© Lauge Fuglsang Nielsen  
Laboratoriet for Bygningsmaterialer  
Danmarks tekniske Universitet  
DK-2800 Lyngby  
Telefon: 45 251832  
Telefax: 45 886753

Dele af denne rapport må reproduceres, men kun med angivelse af kilden: *Lauge Fuglsang Nielsen: Kuglearmerede og porøse materialer under volumetriske påvirkninger. Laboratoriet for Bygningsmaterialer, Danmarks tekniske Universitet, Teknisk Rapport 340, 1995.*

# Kuglearmerede og porøse materialer

## *under volumetriske påvirkninger*

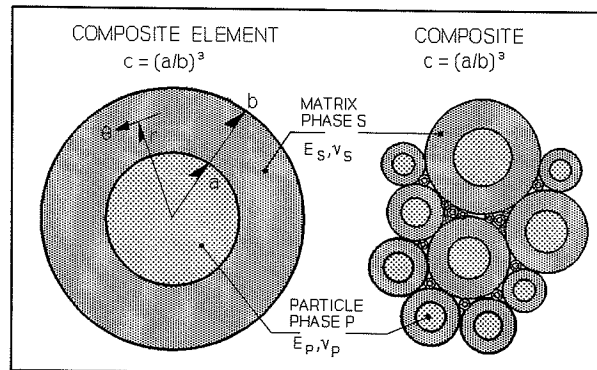
Lauge Fuglsang Nielsen

### *Introduktion*

En række udtryk udvikles i denne rapport til anvendelse i spændings-tøjnings-analyser af isotrope, elastiske partikelarmerede (herunder porøse) materialer under volumetriske påvirkninger som for eksempel hydrostatisk ydre last, indre poretryk og egentøjninger i kompositmaterialiets faser. Eksempler på de sidstnævnte påvirkninger er temperaturbevægelser og svind samt partikelekspansion i beton. De præsenterede udtryk er illustrerede i figurer med materialeparametre, der er relevante for mørtel og beton.

### **Materialemodel**

Den anvendte materialemodel, vist i Figur 1, er den såkaldte kuglemodel introduceret af Hashin i (1) under navnet Composite Spheres Assemblage. Det er en tæt



**Figure 1.** Model for kuglearmeret materiale.

pakning af kongruente kugleformede kompositelementer med ens kuglekoncentration. Under volumetriske påvirkninger af kompositmaterialet vil hvert enkelt kompositelement blive påvirket på samme måde i denne materialemodel. Interaktion forekommer ikke, hvorfor kompositmaterialets egenskaber kan bestemmes udfra analyser på et enkelt kompositelement. Rapportens udvikling af resultater hviler på kompositanalyser tidligere foretaget af forfatteren i (2,3,4,5).

### **Betegnelser og symboler**

Betydningen af betegnelser og symboler anvendt i rapporten er som følger: Indeks P og S henviser generelt til kugler (fase P) henholdsvis matrix (fase S). Ikke indicerede symboler refererer i almindelighed til kompositens egenskaber. Volumenkon-

centration  $c$  af kugler er defineret i Ligning 1. Symbolerne  $E$ ,  $K$ ,  $G$  og  $\nu$  betyder Young's modul, kompressionsmodul, forskydningsmodul henholdsvis Poisson's forhold. Stivhedsforhold er betegnet ved  $n$ . Poisson-parametre ved  $\kappa$ . Nyttige sammenhænge mellem stivhedsparametre er givet i Ligning 2.

$$c = \frac{\text{Volumen}_p}{\text{Volumen}_p + \text{Volumen}_s} = \left[ \frac{a}{b} \right]^3 \quad \text{Kuglekoncentration} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{E_I}{3(1 - 2\nu_p)} ; G_I = \frac{E_I}{2(1 + \nu_p)} ; I = P, S \\ n &= \frac{E_p}{E_s} ; n_k = \frac{K_p}{K_s} = n \frac{1 - 2\nu_s}{1 - 2\nu_p} \\ \kappa_s &= \frac{2(1 - 2\nu_s)}{1 + \nu_s} = \frac{4 G_s}{3 K_s} ; \kappa_p = \frac{2(1 - 2\nu_p)}{1 + \nu_p} = \frac{4 G_p}{3 K_p} \end{aligned} \quad (2)$$

Hydrostatiske spændinger, tøjninger og deformationer angives ved  $\sigma$ ,  $\epsilon$  henholdvis u. Hvor spændingerne ikke er hydrostatiske som i matrixfasen markeres radiær spænding med  $r$  og tangentiell spænding med  $\theta$ , se Figurerne 1 og 2. Symbolet  $\alpha$  anvendes for volumetrisk egentøjning. Compositegenskaber (gennemsnitsegenskaber) "aflæses" fra virkninger på kompositelementes overflade, for eksempel er komposittøjning overfladens radiære bevægelse  $u$  divideret med overfladens radius  $b$ .

Kuglespændingen er altid hydrostatisk og lig matrixens radialsplænding tættest ved kuglen. Af ligevægtsmæssige grunde gælder følgende relation mellem kompositmaterialets ydre påvirkning, kuglespændingen og den hydrostatiske *gennemsnitsspænding* i matrixfasen.

$$\sigma = c\sigma_p + (1 - c)\bar{\sigma}_s \quad (\bar{\sigma}_s \text{ er volumengennemsnit af } \sigma_s) \quad (3)$$

## Porøst materiale

### Udvendig og indvendig last

Følgende spændings- og deformationsudtryk kan opstilles for det i Figur 2 afbildede porøse materiale under ydre og indre belastning. Udtrykkene er modificerede versioner af tilsvarende udtryk i (5).



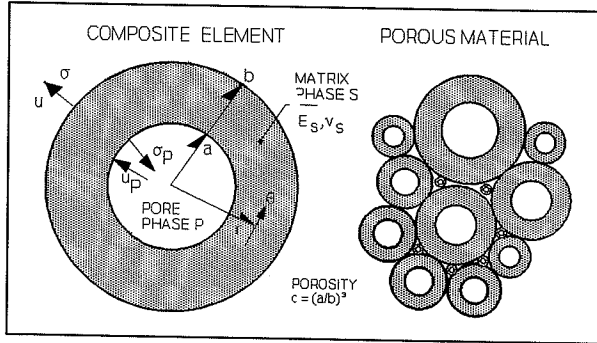


Figure 2. Model af kugleporøst materiale.

$$\sigma_s = \frac{\sigma - c\sigma_p - (\sigma - \sigma_p)(a/r)^3}{1 - c} ; \quad \sigma_{sp} = \frac{\sigma - c\sigma_p + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma_p)(a/r)^3}{1 - c} \quad (4)$$

$$\epsilon = \frac{u}{b} = \frac{\sigma(c + \kappa_s) - c\sigma_p(1 + \kappa_s)}{3\kappa_s K_s(1 - c)} ; \quad \frac{u_p}{a} = \frac{\sigma(1 + \kappa_s) - \sigma_p(1 + c\kappa_s)}{3\kappa_s K_s(1 - c)} \quad (5)$$

I afbildninger kan med fordel anvendes

$$\rho = \frac{r}{a} = 1 - x + \frac{x}{\sqrt[3]{c}} ; \quad x = (0 - 1) \sim r = (a - b) \quad (6)$$

### Poretryk alene

I tilfældet poretryk  $\sigma_{\text{PORE}} = -\sigma_p$  alene fås udtrykkene i Ligningerne 7 og 8.

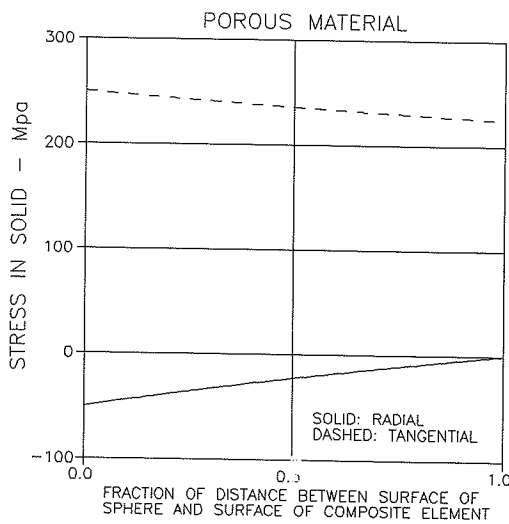


Figure 3.  $c = 0.75$ .  $(\sigma, \sigma_p) = (0, -50)$  MPa

$$\varepsilon = \frac{u}{b} = \frac{\sigma_{PORE} c(1 + \kappa_s)}{3K_s \kappa_s(1 - c)} \quad (7)$$

$$\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{PORE}} = -\frac{1/\rho^3 - c}{1 - c} ; \quad \frac{\sigma_{ss}}{\sigma_{PORE}} = \frac{0.5/\rho^3 - c}{1 - c} ; \quad \frac{\bar{\sigma}_s}{\sigma_{PORE}} = \frac{c}{1 - c} \quad (8)$$

## Kompositmateriale

Vi ser nu på det egentlige kompositmateriale, hvor porerne i det porøse materiale er erstattet af kugler i perfekt kontakt med porevæggene. Under en ydre belastning forlanger vi at der i kontaktzonen mellem matrix og kugler skal være en spænding  $\sigma_p$ , der netop får de to faseoverflader til at følges ad. Beregningen af sammenhængsspændingen og den øvrige spændingstilstand i kompositmaterialet sker som forklaret nedenfor.

### Spændingstilstand

Kontaktzonen, betragtet som kugleoverflade, bevæger sig efter Ligning 9, mens den, betragtet som porevæggen i det porøse materiale, bevæger sig efter det sidste udtryk i Ligning 5. Sammenhæng i kompositmaterialet er opnået, når disse udtryk giver samme bevægelse, hvilket sker, når sammenhængsspændingen  $\sigma_p$  er som angivet i Ligning 10. Herefter kan de øvrige spændingstilstande i kompositmaterialet beregnes efter Ligning 4. Resultaterne er angivet i Ligning 11.

$$\varepsilon_{PKK} = \frac{\sigma_{PKK}}{3K_p} \Rightarrow \varepsilon_p = \frac{\sigma_p}{3K_p} \Rightarrow u_p = \frac{a\sigma_p}{3K_p} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_p}{\sigma} &= \frac{n_k(1 + \kappa_s)}{n_k + \kappa_s[1 + c(n_k - 1)]} ; & \text{kuglespænding} \\ \frac{\bar{\sigma}_s}{\sigma} &= \frac{1 - c\sigma_p/\sigma}{1 - c} ; & \text{matrixspænding (gennemsnit)} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\frac{\sigma_r}{\sigma} = \frac{1 - c\sigma_p/\sigma - (1 - \sigma_p/\sigma)/\rho^3}{1 - c} ; \quad \frac{\sigma_\theta}{\sigma} = \frac{1 - c\sigma_p/\sigma + \frac{1}{2}(1 - \sigma_p/\sigma)/\rho^3}{1 - c} \quad (11)$$

## Komposittøjning og -stivhed

Med den ovenfor bestemte sammenhængsspænding ( $\sigma_p$ ) kan kompositmaterialets tøjning bestemmes ved første udtryk i Ligning 5. Resultatet er

$$\varepsilon = \frac{u}{b} = \frac{n_k + \kappa_s - c(n_k - 1)}{3K_s(n_k + \kappa_s[1 + c(n_k - 1)])} \sigma = \frac{\sigma}{3K} \quad (12)$$

der også, som vist, kan udtrykkes ved en såkaldt kompositstivhed - her kompositmaterialets kompressionsmodul  $K$ , der renskrevet bliver som udtrykt i Ligning 13.

$$\frac{K}{K_s} = \frac{n_k + \kappa_s[1 + c(n_k - 1)]}{n_k + \kappa_s - c(n_k - 1)} \quad (13)$$

Det noteres at udtrykket nøjagtigt svarer til Hashin's løsning (1) for kompressionsmodulen af Composite Spheres Assemblage.

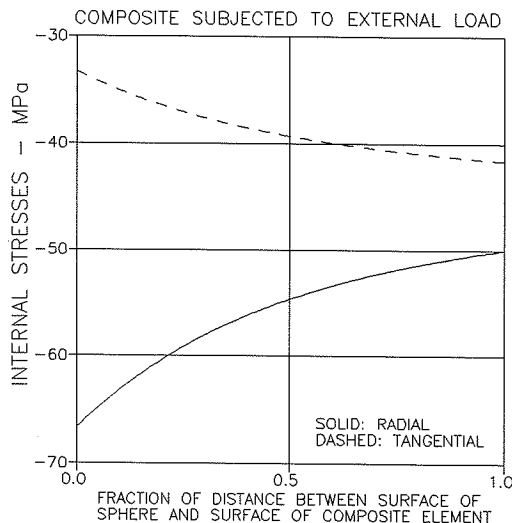


Figure 4.  $c = 0.25$ .  $\sigma = -50$  MPa.  $(E_p, E_s) = (75000, 25000)$  MPa.  $(\nu_p, \nu_s) = (0.2, 0.2)$

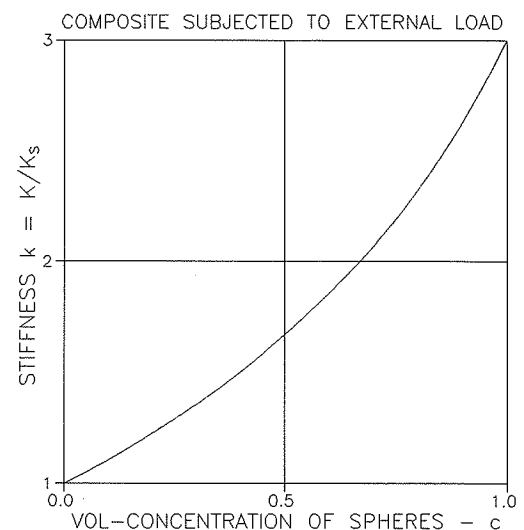


Figure 5.  $(E_p, E_s) = (75000, 25000)$  MPa.  $(\nu_p, \nu_s) = (0.2, 0.2)$

## Stivhedsgrænser

Udtrykket 13 kan transformeres, så det udtrykker stivheden for et kompositmaterialet med den modsatte geometri af, hvad vi tidligere har betragtet. Det vil sige, at fase S antager rollen som kugle og fase P bliver den koncentriske matrixskal. Fase P koncentrationen er som før. Transformationen sker ved at bytte indeks i Ligning 13 (fx  $K_s \Leftrightarrow K_p$ ,  $n_k \Leftrightarrow 1/n_k$ ) og udskifte  $c$  med  $1-c$ . Resultatet bliver

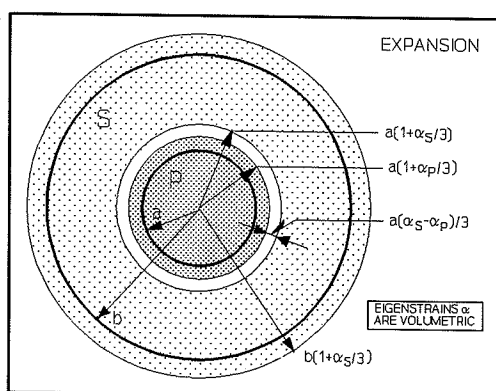
$$\frac{K}{K_s} = n_k \frac{1 + \kappa_p[1 + c(n_k - 1)]}{n_k(1 + \kappa_p) - c(n_k - 1)} \quad (14)$$

Kompositmaterialer med en indre geometri, hvor fase P gennemløber alle geometrier mellem kugle og kugleskal, skifter kompressionsmodul fra den, der beskrives ved Ligning 13 mod den, der beskrives ved Ligning 14.

**Bemærkninger:** Iagttagelsen af ovennævnte forhold vedrørende geometriens indflydelse på kompositstivhed er grundlaget for forfatterens analyser i (3,4) af kompositmaterialer med *vilkårlig fasegeometri*. Det bemærkes, at Ligningerne 13 og 14 svarer nøje til de af Hashin and Shtrikman (6) bestemte stivhedsgrænser.

### Egenspænding/tøjnings-problemer

Et materiales egentøjning er den tøjning, som fremkommer i det fritliggende materiale som følge af andre påvirkninger end mekanisk last. Hygro-termiske



**Figure 6.** Egentøjnings-fremkaldt deformation i kompositmateriale med adskilte faser.

egentøjninger som temperaturtøjninger, svind og svelning er velkendte eksempler. Vi angiver, som det normalt gøres i materialelitteraturen, egentøjninger ved deres volumetriske værdi, det vil sige  $\alpha = 3$  gange den lineære egentøjning. Svind er en negativ egentøjning. Termisk egentøjning er temperatur gange den specifikke termiske ekspansion.

Spændinger og tøjninger, der fremkommer i kompositmaterialer som følge af, at de indgående faser besidder egentøjning, kan beregnes som følger. Først tænker vi os kugle og matrix frigjort fra hinanden så de kan bevæge sig frit, se Figur 6. Herefter genskaber vi det "hele" kompositmateriale ved at introducere den spænding, der virkende på matrix og kugle kan lukke gabet i det frigjorte kompositmateriale. Spændingen findes ved at løse ligningen givet ved det første udtryk i Ligning 15 med fasedeformationer som angivet i det andet udtryk.  $u_{sp}$  er deformationen af matrixfasens indre overflade bestemt ved Ligning 5 med ydre spænding  $\sigma = 0$ .  $u_{pp}$  er kugleoverfladens deformation.

$$\frac{a}{3}(\alpha_s - \alpha_p) = u_{SP} + u_{PP} \quad (15)$$

$$u_{SP} = -\frac{\sigma_p a}{3K_s} \frac{1 + c\kappa_s}{(1 - c)\kappa_s} ; \quad u_{PP} = \frac{\sigma_p a}{3K_p}$$

Resultatet af denne operation er givet i Ligning 16, hvorefter den øvrige spændingstilstand, ved hjælp af Ligning 4, bliver som anført i Ligning 17

$$\sigma_p = -K_p \Delta \frac{\kappa_s(1 - c)}{n_k + \kappa_s[1 + (n_k - 1)c]} ; \quad \Delta = \alpha_p - \alpha_s \quad (16)$$

$$\bar{\sigma}_s = -\frac{c}{1 - c} \sigma_p ; \quad \text{matrixspænding (gennemsnit)}$$

$$\sigma_{sr} = \sigma_p \frac{1/\rho^3 - c}{1 - c} ; \quad \sigma_{sw} = -\sigma_p \frac{0.5/\rho^3 + c}{1 - c} \quad (17)$$

Kompositmaterialets volumetriske egentøjning er 3 gange den ydre bevægelse/b ( $\alpha_s$ ) i den adskilte komposit plus  $3u/b$  stammende fra kuglens egenspænding som den er udtrykt ved Ligning 16. Resultatet er givet i Ligning 18.

$$\alpha = \alpha_s + \Delta \frac{n_k(1 + \kappa_s)c}{n_k + \kappa_s[1 + (n_k - 1)c]} \quad (18)$$

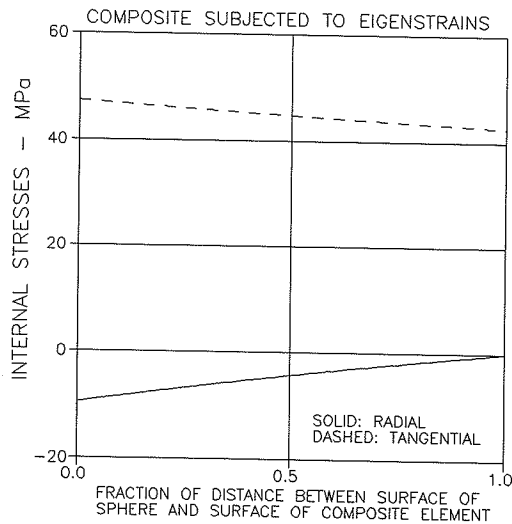
Ovennævnte løsninger er konsistente med tilsvarende udtryk udledt i (2).

### Egentøjning i matrix alene

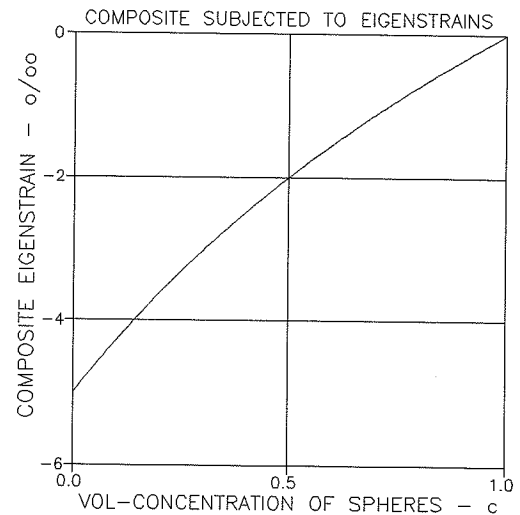
Såfremt kun matrixfasen udviser egentøjning reduceres ovenstående udtryk som følger. Udtrykket, Ligning 17, for normal og tangentielle spændinger i matrixen bibeholdes.

$$\sigma_p = K_p \alpha_s \frac{\kappa_s(1 - c)}{n_k + \kappa_s[1 + (n_k - 1)c]} ; \quad \bar{\sigma}_s = -\frac{c}{1 - c} \sigma_p \quad (19)$$

$$\alpha = \alpha_s \frac{(n_k + \kappa_s)(1 - c)}{n_k + \kappa_s[1 + (n_k - 1)c]} \quad (20)$$



**Figure 7.**  $c = 0.75$ .  $(E_p, E_s) = (75000, 25000)$  MPa.  $(\nu_p, \nu_s) = (0.2, 0.2)$ .  $(\alpha_p, \alpha_s) = (0, -5)$  o/o. (Matrixsvind).



**Figure 8.**  $(E_p, E_s) = (75000, 25000)$  MPa.  $(\nu_p, \nu_s) = (0.2, 0.2)$ .  $(\alpha_p, \alpha_s) = (0, -5)$  o/o. (Matrixsvind).

## Slutbemærkninger

Rapportens analyser har implicit forudsat, at kompositmaterialet faser (partikler og matrix) er lineær-elastiske. En sådan antagelse er ofte en oversimplifikation, når virkelige kompositmaterialer betragtes. Beton, for eksempel, er udpræget viskoelastisk, og kan derfor ikke umiddelbart analyseres ved hjælp af rapportens resultater. Et eksempel illustrerer dette forhold, trækspændinger i en betons cementpasta opstået som følge af svind vil aldrig opnå værdier, som beregnet efter Ligningerne 16, 17 og 19. Relaxation i pastaen vil forhindre dette.

Rapportens resultater kan imidlertid anvendes som et væsentligt grundlag i virkelighedstro analyser af kompositmaterialers mekaniske adfærd. De skal herunder integreres med grundprincipperne i viskoelastiske kompositanalyser som disse er beskrevet af forfatteren i (2,7,8) for eksempel. I tilfældet beton kan de viskoelastiske materialeegenskaber predikteres efter metoder angivet i (9,10).

## Litteratur

1. Hashin, Z.: "Elastic moduli of heterogeneous materials". J. Appl. Mech., 29 (1962), 143 - 150.
2. Nielsen, L. Fuglsang: "Interne Spannungen sowie Schwind- und Temperaturdeformation des Betons", Cement and Concrete Research, 4(1974), 31.

3. *Idem*: "Elastic properties of two-phase materials", *Materials Science and Engineering*, 52(1982), 39.
4. *Idem*: "Mechanics of composite material subjected to eigenstress - with special reference to frost resistance of porous brittle material", *Danish Building Research Institute, SBI-Bulletin* 96(1993).
5. *Idem*: "Pore size distribution and shrinkage of porous material", *Tech. report* 316(1994), *Build. Mat. Lab., Tech. Univ. Denmark*.
6. Hashin, Z. and Shtrikman, S.: "Variational approach to the theory of elastic behavior of multi-phase materials". *J. Mech. Solids*, 11(1963), 127 - 140.
7. Nielsen, L. Fuglsang: "Rheologische Eigenschaften für isotrope linear-viscoelastische Kompositmaterialien", *Cement and Concrete Research*, 3(1973), 751.
8. *Idem*: "The Improved Dischinger Method as Related to Other Methods and Practical Applicability", In "Design for Creep and Shrinkage in Concrete Structures", *ACI Special Publication SP-76(1982)*, 169 - 191.
9. *Idem*: "On the Prediction of Creep Functions for Concrete", in "Fundamental Research on Creep and Shrinkage of Concrete" (ed. F. Wittmann), *Martinus Nijhoff Publishers, The Hague* 1982, 279 - 289.
10. *Idem*: "Creep and Stiffness of Concrete - a rational prediction method", (in danish with eng. summary). *Dansk Beton* 4(1992).