Downloaded from orbit.dtu.dk on: Sept 08, 2026

DTU Library

Fusionsplasmafysik

Jensen, V.O.

Publication date:
1989

Document Version
Publisher's PDF, also known as Version of record

Link back to DTU Orbit

Citation (APA):
Jensen, V. O. (1989). *Fusionsplasmafysik*. Risø National Laboratory. Risø-M No. 2743

General rights
Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

Fusionsplasmafysik

Risø-M-2743

Vagn O. Jensen

Forskningscenter Risø, 4000 Roskilde, Danmark
September 1989

Abstrakt. Fusionsenergi. Plasmabegrebet. Ladede partiklers bevægelse i elektriske og magnetiske felter. Fluidbeskrivelsen. Toroidale systemers ligevægt og stabilitet behandlet i ideal MHD. Plasmadiffusion.

ISBN-87-550-1461-5
ISSN 0418-6435

Grafisk Service, Risø 1989

Indholdsfortegnelse

		Side
FORORD		vii
1.	**FUSIONSENERGI**	1
1.1.	Energisituationen. Ressourcer og Efterspørgsel	1
1.2.	Termonuklear Fusion	3
1.2.1.	Energiproduktion ved kerneprocesser	3
1.2.2.	Fusionsprocesser	4
1.2.3.	Fusionsprocessernes tværsnit	5
1.2.4.	Princippet i termonuklear fusion. Plasmabegrebet	7
1.2.5.	Reaktionshastighed og effekttæthed i fusionsplasma	8
1.2.6.	Lawson-kriteriet og antænding	13
1.2.7.	Et tilbageblik over fusionsforskningen	18
1.2.8.	Fusionsforskningen fremover	20
2.	**PLASMABEGREBET**	22
2.1.	Dannelse af Plasma. Saha-ligningen	22
2.2.	Plasmaforekomster	23
2.3.	Karakteristiske Plasmaparametre	24
2.3.1.	Middelafstand mellem partikler	25
2.3.2.	Debye-længden	25
2.3.3.	Korteste afstand ved centralt stød	30
2.3.4.	Fri middelvejlængde mellem Coulombstød	31
2.3.5.	Gyroradier	33
2.3.6.	Sammenligning mellem karakteristiske længder	33
2.3.7.	Plasmafrekvvenserne	34
2.3.8.	Gyrofrekvenserne	36
2.3.9.	Kollisionsfrekvenser	36
2.3.10.	Sammenligning mellem karakteristiske frekvenser	37
2.3.11.	Uddybet definition af plasmabegrebet	37
3.	**LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE I ELEKTRISKE OG MAGNETISKE FELTER**	39
3.1.	Bevægelsesligningen	39
3.1.1.	Inhomogent men tidsuafhængigt magnetfelt, $\mathbf{E} = 0$	40
3.1.2.	Inhomogene men tidsuafhængige felter	40
3.2.	Bevægelsesbaner i Simple Feltkonfigurationer	41
3.2.1.	$\mathbf{E}$ = konstant i tid og rum, $\mathbf{B} = 0$	41
3.2.2.	$\mathbf{B}$ = konstant i tid og rum, $\mathbf{E} = 0$	41
3.2.3.	$\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ begge konstant i tid og rum, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$	42
3.2.4.	Ydre kraft, $\mathbf{K}$, vinkelret på homogent magnetfelt, $\mathbf{E} = 0$	44
3.2.5.	Inhomogent magnetfelt med transversal gradient ($\nabla B \perp \mathbf{B}$), $\mathbf{E} = 0$	44
3.2.6.	Ladede partiklers bevægelse i toroidale felter	47

Side

3.3. Adiabatiske invarianter 49
3.3.1. Det magnetiske moment. Spejlmaskiner 49
3.3.2. Den longitudinale invariant 54
3.3.3. Den adiabatiske fluxinvariant 56
3.3.4. Nogle konsekvenser af adiabatiske invarianter 57

4. FLUIDBESKRIVELSEN 59
4.1. Boltzmannligningen. Den Kinetiske Beskrivelse 59
4.2. Fluidligningerne 66
4.3. Ideal Magnetohydrodynamik 71

5. TOROIDALE SYSTEMERS LIGEVÆGT OG STABILITET BEHANDLET I IDEAL MHD 84
5.1. Generelle Egenskaber ved Ideal MHD 85
5.1.1. Bevaring af magnetisk flux 85
5.1.2. Plasmas diamagnetisme i simpel én-dimensional geometri 86
5.2. Toroidale Systemer 90
5.2.1. Tokamakkonfigurationen 92
5.2.2. Stellaratorkonfigurationen 95
5.3. Generelle Egenskaber for Plasmaer i Ligevægt i Toroidale Konfigurationer 96
5.4. Kvalitative Betragtninger over Plasmaindeslutning i Toroidale Konfigurationer 100
5.5. Kvantitative Betragtninger over Plasmaindeslutning i Én-dimensionale Konfigurationer 107
5.5.1. θ-pinchen 107
5.5.2. Z-pinchen 109
5.5.3. Kvalitative stabilitetsvurderinger for Z- og θ-pincherne 114
5.5.4. Skruepinchen 116
5.5.5. Kvalitative stabilitetsvurderinger for skruepinchen 121
5.6. Generelle Bemærkninger om Tokamakkonfigurationens Ligevægt og Stabilitet 124

6. PLASMADIFFUSION 128
6.1. Generelt om Diffusion 128
6.2. Diffusion af Plasma i Homogent Magnetfelt. Klassisk Diffusion 130
6.2.1. Diffusion forårsaget af kollisioner 130
6.2.2. Plasmadiffusion behandlet i fluidbeskrivelsen 135
6.2.3. Klassisk Diffusion i Fusionsplasmaer 142
6.3. Neoklassisk Diffusion i Tokamakkonfigurationer 145
6.3.1. Partikelbaner i Tokamakkonfigurationer 145
6.3.2. Diffusionskoefficienten for neoklassisk diffusion 152
6.4. Turbulent diffusion. Bohm-diffusion 157

LITTERATURLISTE 160

APPENDIKS 1. FORDELINGSFUNKTIONER 162
A.1.1. Definition af Fordelingsfunktion 162
A.1.2. Termisk Ligevægt. Maxwellfordelingen 164

Side

APPENDIKS 2. KOLLISIONSPROCESSER 168
A.2.1. Tværsnit for Kollisionsprocesser 168
A.2.2. Reaktionshastigheder 169
A.2.3. Fri Middelvejlængde 170

APPENDIKS 3. UDLEDELSE AF BOLTZMANN LIGNINGEN 172

APPENDIKS 4. MOMENTER AF VLASOV LIGNINGEN 174

APPENDIKS 5. DIFFUSION VED RANDOM WALK 178

APPENDIKS 6. FORMLER OG FUNDAMENTALE FYSISKE KONSTANTER 182
A.6.1. Nyttige Formler fra Vektoranalysen 182
A.6.1.1. Vektorrelationer 182
A.6.1.2. Differentialoperatorer i specielle koordinatsystemer 183
A.6.2. Fundamentale Fysiske Konstanter 188

STIKORDSREGISTER 189

FORORD

Denne bog benyttes ved undervisningen i Plasmafysik I (Fusionsfysik) ved Danmarks Tekniske Højskole. Formålet med dette kursus er at give de studerende kendskab til den fysik, som danner grundlaget for den fredelige udnyttelse af fusionsenergien, herunder - på elementært niveau - at give en forståelse af et plasmas fysiske egenskaber. Noterne behandler kun det grundlæggende stof om termonuklear fusion og fusionsrelevant plasmafysik, som er absolut nødvendigt for en forståelse af fusionsforskningens problemer. Den nyeste udvikling inden for fusionsforskningen og dermed den aktuelle situation behandles også i dette kursus, men den meddeles gennem læsning af tidsskriftsartikler og supplerende noter, som løbende revideres år for år.

På grund af den stærkt begrænsede tid, der er til rådighed i et enkelt kursus, og på grund af fusionsforskningens mangesidethed er det nødvendigt at holde gennemgangen af de enkelte problemer på et relativt elementært niveau og at udelade en detaljeret gennemgang af mange af de fysiske problemer. De steder, hvor det har været nødvendigt at benytte formler uden udledning, er der henvist til andre lærebøger, hvori detaljerede udledninger kan findes.

Skønt plasmafysik er en forholdsvis ny gren inden for fysikken, baserer den sig næsten alene på klassiske discipliner som mekanisk fysik, elektromagnetisk feltteori (Maxwell-ligningerne) og kinetisk gasteori. Disse discipliner er forudsætninger for faget. Erfaringen fra flere års undervisning har imidlertid vist, at netop de områder af de klassiske discipliner, som danner grundlaget for plasmafysikken, trænger til genopfriskning. I en række appendiks til disse noter gives korte resuméer af udvalgte områder fra de klassiske discipliner.

Som grundregel er der i disse noter benyttet MKSA-enheder (SI-systemet). For at klargøre brugen af enheder er der i noterne skelnet mellem to typer formler:

a) Egentlige fysiske love som Maxwell-ligningerne, Newton's anden lov, etc. I disse formler er resultatets enhed en følge af de indgående størrelsers- og naturkonstanters enheder. Det er klart, at når alle størrelser indsættes i MKSA-enheder, vil resultatet også komme ud i MKSA-enheder.
b) Skaleringslove som for eksempel eksperimentelt bestemte relationer for effektproduktionen i et fusionsplasma eller teoretiske relationer, der er gjort mere bekvemme i brug. I disse formler, der afhænger af hvilke enheder, der benyttes, følger enheder af resultatet ikke af de indgående størrelsers enheder, men angives eksplicit. Der er i disse noter konsekvent sat firkantet parentes omkring de størrelser i skaleringslovene, for hvilke

der skal indsættes talværdier. Direkte efter formlerne er det angivet i hvilken enhed, resultatet kommer ud, og i hvilke enheder størrelserne skal indsættes.

Denne bog er udarbejdet gennem en periode på ca. fem år op til 1989. Foreløbige udkast til de forskellige kapitler har været brugt ved undervisningen i denne periode. Jeg takker de studerende, der har bidraget til at forbedre bogens læselighed ved at påpege fejl, unøjagtigheder og svage formuleringer i de første udkast. Stud. polyt. Henrik Bindslev har gennemarbejdet de første fire kapitler kritisk og fremsat flere forslag til forbedringer, og han har været ansvarlig for en del redaktionelt arbejde. Stud. polyt. Frank Fahrendorf har læst korrektur på hele bogen og udarbejdet de to sidste appendiks. Jeg ønsker at takke dem begge for en indsats, der har forøget noternes læselighed væsentligt. Der skal også rettes en tak til personalet på Risøs skrive- og tegnestue for deres dygtighed og tålmodighed under udarbejdelsen af manuskriptet til denne bog.

Disse noter er udarbejdet med støtte fra Fusionsassocieringen Forskningscenter Risø-Euratom.

Plasmafysiksektionen
Fysikafdelingen
Forskningscenter Risø
og
Afdelingen for Elektrofysik
Danmarks Tekniske Højskole.
Sommeren 1989.
Vagn O. Jensen

Denne udgave af **FUSIONSPLASMAFYSIK** er et fotografisk genoptryk af den første udgave fra 1989. Kun nogle få trykfejl er rettet.

Risø, August 1997.

Vagn O. Jensen.

1. FUSIONSENERGI

1.1. Energisituationen. Ressourcer og Efterspørgsel

Globalt energiforbrug

Det globale forbrug af energi beløber sig i slutningen af 1980-erne til ca. 0,3 Q pr. år. Energienheden 1 Q = 10^{18} BTU (British Thermal Unit) = $1{,}054 \cdot 10^{21}$ J. Den altovervejende del (mere end 90%) af denne energi produceres ved afbrænding af de fossile brændstoffer kul, olie og naturgas. Kun ca. 2% kommer fra fission af U^{235} i de nu arbejdende kernekraftværker. Af de såkaldte alternative eller vedvarende energikilder er det kun vandkraften, der har betydning, den tegner sig for ca. 6%. Det samlede bidrag fra solenergi, vindkraft, bølgeenergi, jordvarme osv. er forsvindende (< 1%).

I de sidste 25 år er det globale energiforbrug i snit steget med godt 4% pr. år. Dermed har de ca. 30% af jordens befolkning, der bor i industrialiserede områder, opnået en høj levestandard som vores. De 70% af jordens befolkning, der lever i ulandene, tegner sig for kun ca. 16% af det samlede energiforbrug.

Ved planlægning af fremtidens energiproduktion er der 3 hovedhensyn at tage:

1) energien skal kunne produceres inden for økonomisk acceptable rammer.
2) energiproduktionens uheldige virkninger på miljøet skal kunne accepteres.
3) forsyningssikkerheden for leverancer af råprodukter til energiproduktionen må være tilstrækkelig.

Begrænsede energireserver
Forurening

De lettilgængelige forekomster af kul, olie og naturgas, som vi i øjeblikket baserer hovedparten af energiproduktionen på, er begrænsede til ca. 15-30 Q. Ved uændret forbrug kan de altså dække behovet i 50 til 100 år. Hvis forbruget fortsætter med at stige som nu, f.eks. for at u-landenes stadigt voksende befolkninger kan komme op på en højere levestandard, så vil de lettilgængelige forekomster være opbrugt om nogle få årtier. En anden uheldig egenskab ved disse forekomster er, at de findes på relativt få lokaliteter, hvoraf mange ligger i politisk ustabile områder. Forsyningssikkerheden er altså lille.

Hvis man på længere sigt, dvs. når de lettilgængelige forekomster er opbrugte, vil fortsætte med at basere energiproduktionen på fossile brændstoffer, må man ty til de sværttilgængelige forekomster. Der findes flere hundrede Q i sværttilgængelige kulforekomster, og i amerikanske tjæresand- og skifferolieforekomster er der tilsvarende store energireserver. Det er imidler-

tid så svært at udvinde brændstofferne fra disse forekomster, at en væsentlig stigning i energiprisen vil blive uundgåelig.

En måske meget mere ubehagelig følge af fortsat at afbrænde fossile brændstoffer i store mængder er den deraf følgende forurening af atmosfæren med CO_2. Allerede nu er CO_2-koncentrationen væsentligt over det naturlige niveau. Det er uklart, hvilke konsekvenser en yderligere forøgelse vil have for det globale klima. Man kan frygte, at drivhuseffekten vil få gennemsnitstemperaturen til at stige så meget, at der sker en væsentlig ændring i livsbetingelserne på hele kloden.

De konventionelle atomkraftværker, hvis energiproduktion stammer fra spaltning af U^{235}-atomer, vil kun kunne give et beskedent bidrag til den globale energiproduktion på langt sigt. De forekomster af uran, som det kan betale sig at udvinde med henblik på fission af dets indhold af U^{235}-isotopen, svarer kun til nogle få Q. Diskussionen om, hvorvidt de sikkerhedsmæssige problemer ved atomkraftværker er løst på acceptabel måde, foregår stadig. Den synes nu mest at koncentrere sig om slutdeponeringen af det højaktive affald, men Tjernobyl-katastrofen i foråret 1986 har aktualiseret den generelle sikkerhedsdiskussion.

Vedvarende energireserver

Mange mener, at de alternative energikilder vil kunne dække en stor del af vort energibehov på langt sigt og med lille skadevirkning på miljøet. For vandkraftens vedkommende er ingen væsentlig udvidelse af energiproduktionen mulig, da næsten alle eksisterende vandfald udnyttes allerede. Solenergi, vindkraft, bølgeenergi og jordvarme repræsenterer meget store vedvarende energikilder. F.eks. er den energistrøm, der fra solen rammer jorden, på ca. 5600 Q pr. år (1,3 kW/m^2). Problemet med disse kilder er, at energitætheden i dem alle er lille. Der skal meget store og dyre anlæg til at opsamle tilstrækkelige energimængder. Hvis en væsentlig del af den samlede energiproduktion skal baseres på disse kilder, må der forudses en meget stor stigning i energiprisen.

Formeringsreaktoren

Naturligt uran indeholder kun ca. 0,7% U^{235}, som er den isotop, der kan spaltes i konventionelle atomkraftværker. I formeringsreaktoren kan også de godt 99% U^{238} spaltes, og der dannes derfor meget mere energi pr. vægtenhed naturligt uran. Derfor vil det være økonomisk muligt at udnytte selv meget lidt lødige forekomster til udvinding af uran til en formeringsreaktor. Man vurderer, at der i de naturlige uranforekomster, som det kan betale sig at benytte, er en energimængde svarende til adskillige tusinde Q. Formeringsreaktoren vil altså kunne løse energiproblemet på langt sigt. Denne reaktortype er først blevet færdigudviklet i løbet af de sidste ca. 10 år, og der er endnu kun nogle få i drift. Problemet med denne reaktortype er, ligesom med de konventionelle a-kraftværker, at der mange steder i offentligheden hersker en stor tvivl om, at sikkerhedsproblemerne er løst på acceptabel måde.

Fusionsreaktoren

En anden måde at få et meget stort bidrag til vor energiforsyning på langt sigt vil være at udvikle fusionsreaktorer. Fusionsenergi er en atomenergi, der

frigøres, når lette atomkerner smelter sammen, når de fusionerer. Solen er en stor fusionsreaktor, idet dens energiproduktion skyldes fusionsprocesser i dens indre. På jorden har vi også produceret fusionsenergi, men kun til militære formål, i de såkaldte brintbomber.

Endnu kan vi ikke udnytte fusionsenergien til fredelige formål. Der udføres på verdensbasis et meget stort forskningsarbejde, som er rettet mod at muliggøre en fredelig udnyttelse af fusionsenergien. Hvis eller snarere når det lykkes, har menneskene til deres rådighed en uudtømmelig energikilde, idet råbrændstoffet, deuterium, findes i så store mængder i naturen, at det svarer til flere milliarder Q. F.eks. svarer fusion af den mængde deuterium, der findes i en liter havvand, energimæssigt til afbrænding af 300 l olie.

I denne bog gennemgås nogle af de fysiske problemer, der mødes inden for fusionsforskningen.

1.2. Termonuklear Fusion

1.2.1. Energiproduktion ved kerneprocesser

Kerneenergi

Fra kernefysikken er det kendt, at den energi, hvormed en enkelt nukleon er bundet i en kerne, afhænger af kernens massetal. Fig. 1.1 viser middelbindingsenergien pr. nukleon for de mest stabile kerner samt for tritium som

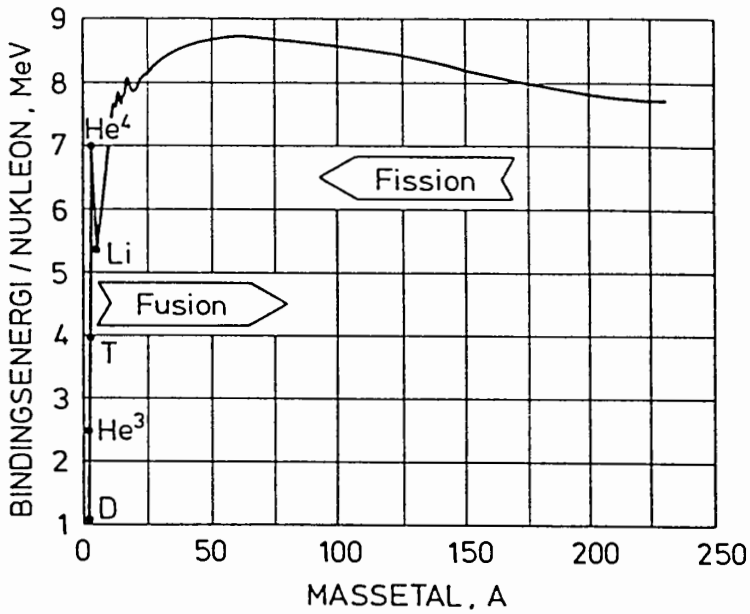

Fig. 1.1. Middelbindingsenergi pr. nukleon for stabile kerner og tritium.

funktion af det nukleare massetal, A. Kurven viser hvor megen energi, der medgår pr. nukleon til at adskille en kerne med givet massetal i fri nukleoner. Det viser dermed også, hvor megen energi, der frigøres, når der af et antal nukleoner dannes en kerne. At kurven har sit maximum omkring massetallet 50 betyder, at der er to muligheder for at frigøre energi ved kerneprocesser:

1) Spaltning eller fission af tunge kerner til lettere kerner med massetal nærmere 50 afgiver op til en MeV pr. nukleon; det er som bekendt disse processer, der udnyttes i fissionskraftværker.
2) Sammensmeltning eller fusion af lette kerner til tungere kan afgive op til adskillige MeV pr. nukleon.

Såvel ved fission som ved fusion optræder den frigjorte energi hovedsagelig som kinetisk energi på de dannede partikler, men en del af den kan også udsendes som γ-stråling.

1.2.2. Fusionsprocesser

Der er mange fusionsprocesser, der principielt kunne benyttes i et fusionskraftværk. Nogle af dem, som interessen koncentrerer sig mest om, er:

(I) $D + D \rightarrow {}^3He + n + 3{,}25\ MeV$,

(II) $D + D \rightarrow T + p + 4{,}0\ MeV$,

(III) $D + T \rightarrow {}^4He + n + 17{,}6\ MeV$,

(IV) $D + {}^3He \rightarrow {}^4He + p + 18{,}3\ MeV$,

(V) ${}^6Li + p \rightarrow {}^3He + {}^4He + 4{,}0\ MeV$.

D står for deuterium, n for neutron, T for tritium og p for proton (^1H). ^4He står for helium-4-kerner, også kaldet α-partikler. De to D + D-processer, (I) og (II), forløber med næsten samme sandsynlighed. Den ved processerne frigjorte energi optræder som kinetisk energi på de dannede partikler, som hver får en del, der er proportional med den anden partikels del af den samlede masse. I processen (III) for eksempel får ^4He-kernen 3,5 MeV kinetisk energi, medens neutronen får 14,1 MeV.

Der er forskellige fordele og ulemper ved de forskellige fusionsprocesser. En afvejning af disse fordele og ulemper mod hinanden vil blive bestemmende for hvilke processer, der vil blive brugt i et kommende fusionskraftværk.

Før disse forhold diskuteres, skal vi se på, hvordan man tænker sig, at et kommende fusionskraftværk vil komme til at fungere.

1.2.3. Fusionsprocessernes tværsnit

Lad en partikel passere gennem et medium med tætheden n. Over en strækning, dx, vil sandsynligheden, dS_α, for at partiklen vekselvirker på en givet måde, α, med en af mediets partikler være proportional med n og dx.

$$dS_\alpha = \sigma_\alpha n dx \qquad (1.1)$$

Reaktionstværsnit

Proportionalitetsfaktoren, σ_α, der har dimension af et areal, betegnes reaktionstværsnittet. Reaktionstværsnittet er et udtryk for sandsynligheden for en given vekselvirkning. Begrebet reaktionstværsnit er forklaret nærmere i Appendiks 2.

Forståelsen af fusionsprocesser og beregning af deres reaktionstværsnit er et udpræget kvantemekanisk problem, men de følgende klassiske betragtninger kan dog give et vist indblik.

Kernekræfter

For at to kerner skal kunne fusionere, må de bringes så tæt sammen, at kernekræfterne bliver aktive og kan overvinde Coulombfrastødningen. Kernediametre for lette atomkerner er ca. $5 \cdot 10^{-15}$ m, og rækkevidden af kernekræfterne er lidt større, men af samme størrelsesorden. Idet der også tages en vis tunneleffekt i betragtning, er det derfor rimeligt at antage, at to kerner for at have en rimelig sandsynlighed for at fusionerne skal bringes i en indbyrdes afstand, d, af størrelsesordenen $2 \cdot 10^{-14}$ m.

Coulombfrastødning

Da kernerne begge er positivt elektrisk ladede, frastøder de hinanden med Coulombkræfter, og det kræver derfor en vis energi at bringe dem ind i afstanden d. Denne energi kan kun tages fra den kinetiske energi, som partiklerne har i deres relative bevægelse mod hinanden. Betragt to kerner med masserne m_1 og m_2, der bevæger sig mod hinanden med hastighederne $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, og som begge har elementarladningen e. Ved at betragte de to partiklers bevægelse i deres tyngdepunktsystem, er det let at vise, at den fri kinetiske energi, som er til rådighed for at overvinde Coulombfrastødningen, og som derved kan omsættes til potentiel energi, er

$$E_{k,fri} = \frac{1}{2} v_r^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad (1.2)$$

hvor $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ er den relative hastighed mellem partiklerne.

Den potentielle energi i systemet af de to partikler i afstanden d er givet ved

$$W_{pot} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o d}, \qquad (1.3)$$

hvor ε_0 er vakuumpermittiviteten = $8{,}85 \cdot 10^{-12}$ F/m. Indsættes e = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C og d = $2 \cdot 10^{-14}$ m, fås W_{pot} = ca. 70 keV.

Ud fra disse vage betragtninger skal den fri kinetiske energi altså være af størrelsesorden 70 keV. Vi må derfor forvente, at tværsnittene for fusionsprocesserne er forsvindende for energier væsentligt mindre end ca. 70 keV og kraftigt voksende med energien fra dette område. De må så forventes at løbe gennem et maksimum for igen at falde, når de relative hastigheder mellem kernerne bliver så store, at vekselvirkningstiden bliver så kort, at kernerne ikke får tid til at reagere, før de har passeret forbi hinanden. Fusionstværsnittene for de forskellige processer er målt i laboratorieforsøg ved at skyde accelererede kerner med kendt energi af den ene slags mod hvilende kerner af den anden slags. På Fig. 1.2 vises de således målte tværsnit for processerne (I), (II), (III) og (IV).

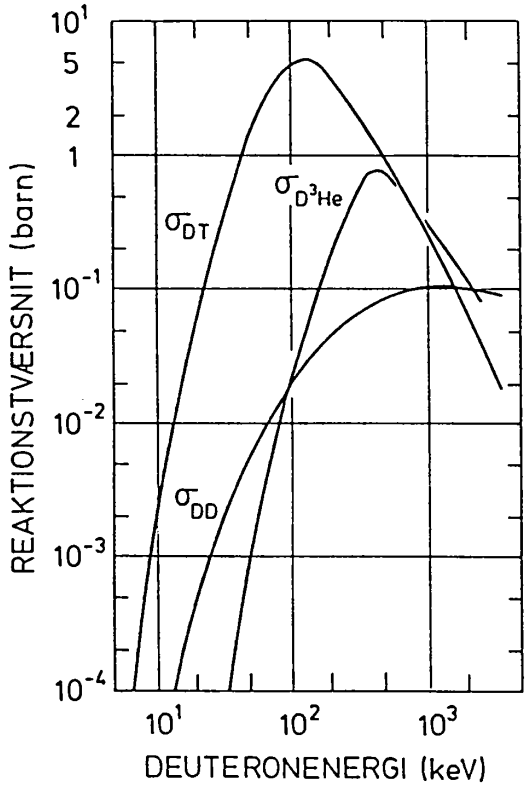

Fig. 1.2. Tværsnit for udvalgte fusionsprocesser. (1 barn = $10^{-28}m^2$). σ_{DD}-kurven repræsenterer summen af tværsnittene for processerne (I) og (II).

For alle fire processers vedkommende er det accelererede deuteriumkerner, deuteroner, der er skudt mod hvilende kerner af henholdsvis D, T og ^{3}He. Energiskalaen på abscisseaksen refererer til de accelererede deuteroners kinetiske energi. Kurven mærket D-D repræsenterer summen af tværsnittene for processerne (I) og (II). Disse to processer har forøvrigt næsten samme tværsnit ved alle energier.

For at få den fri kinetiske energi skal energiskalaen multipliceres med faktoren $m_2/(m_1+m_2)$, hvor m_1 er de accelererede deuteriumers masse, og m_2 er de hvilende kerners masse. For DT- og D^{3}He-processerne skal der altså multipliceres med 0,6, mens der for DD-processen skal multipliceres med 0,5.

1.2.4. Princippet i termonuklear fusion. Plasmabegrebet

Det termonukleare princip

En fremtidig fusionsreaktor formodes at komme til at arbejde efter det termonukleare princip, som er: Brændstoffet, dvs. passende mængder af de stoffer, som optræder på venstre side af den valgte fusionsreaktion (I) til (V), opvarmes. Når temperaturen er blevet tilstrækkelig høj, vil den kinetiske energi, som partiklerne har i deres termiske bevægelser, være tilstrækkelig til, at de vil kunne fusionere med andre partikler, som de støder sammen med. Ved de fusionsprocesser, der således finder sted, dannes der energi. Denne energi vil dels være medvirkende til at opretholde temperaturen i brændstoffet, og dels kan den udnyttes. Hvis den af fusionsprocesserne afsatte energi i brændstoffet er stor nok til at kompensere for energitabene, er brændstoffet antændt på samme måde, som brændstoffet i en almindelig forbrænding antændes. Det forhold, at det er partiklernes termiske energi, der betinger fusionsreaktionerne, har ført til betegnelsen **termonuklear fusion.**

Termonuklear antænding

Termonuklear temperatur

Det vil i det følgende blive vist, at de temperaturer, der er nødvendige i fusionsreaktorer, er meget høje - af størrelsesordenen 10^8 K - og afhængige af hvilken af reaktionerne (I) til (V), der benyttes. Det er disse høje temperaturer, der er det store problem i fusionsforskningen. For det første er det et problem i sig selv at opvarme fusionsbrændstoffet tilstrækkeligt. Men det er også et problem, at det ca. 10^8 K varme fusionsbrændstof ikke må komme i berøring med væggene i den omgivende beholder, da det så omgående vil blive afkølet, og fusionsreaktionerne vil gå i stå. Det varme brændstof skal altså hænge som en samlet sky i en beholder samtidig med, at det er isoleret fra væggene. På tilsvarende måde hænger solen, vores store fusionsreaktor, isoleret i verdensrummet og holdes sammen af sine egne gravitationskræfter.

Plasmabegrebet

Under opvarmningen vil brændstoffet allerede ved en temperatur på nogle få tusinde grader blive ioniseret. Det, der sker, er, at de enkelte atomer får en så stor termisk energi, at de, når de støder sammen, kan slås i stykker i

positive kerner og negative elektroner. Brændstoffet i en fusionsreaktor består altså af en blanding af ladede partikler, kerner og elektroner. En sådan gas af ladede partikler kaldes et **plasma.**

Det forhold, at fusionsbrændstoffet kun består af ladede partikler, altså at det er et plasma, har stor betydning i arbejdet på at løse de to før nævnte problemer med opvarmning og isoleret indeslutning. F.eks. kan man opvarme et fusionsplasma ved at bestråle det med højfrekvent elektromagnetisk stråling, da de ladede partikler jo påvirkes af elektromagnetiske bølger. Vedrørende indeslutningsproblemet kan man tænke sig at opnå den nødvendige isolering fra væggene ved at generere et passende magnetfelt. De ladede partikler påvirkes jo af magnetfelter. Denne bogs hovedformål er at give en introduktion til den fysik, der beskriver plasmaer og specielt plasmaers vekselvirkning med magnetfelter. Hovedvægten er lagt på de sider af plasmafysikken, der er relevante for fusionsforskningen. Inden vi i de følgende kapitler går over til at behandle plasmafysiske problemer, skal vi først se på energiproduktionen i et fusionsplasma. Vi skal opnå en forståelse af kravene til temperatur og indeslutningseffektivitet for et fusionsplasma.

1.2.5. Reaktionshastighed og effekttæthed i fusionsplasma

I dette afsnit skal det vises, hvordan man med hjælp af fusionstværsnittene i Fig. 1.2 kan beregne reaktionshastigheden i et fusionsplasma med given temperatur og sammensætning. Ved reaktionshastighed forstås antallet af reaktioner, der sker i en rumenhed pr. sekund.

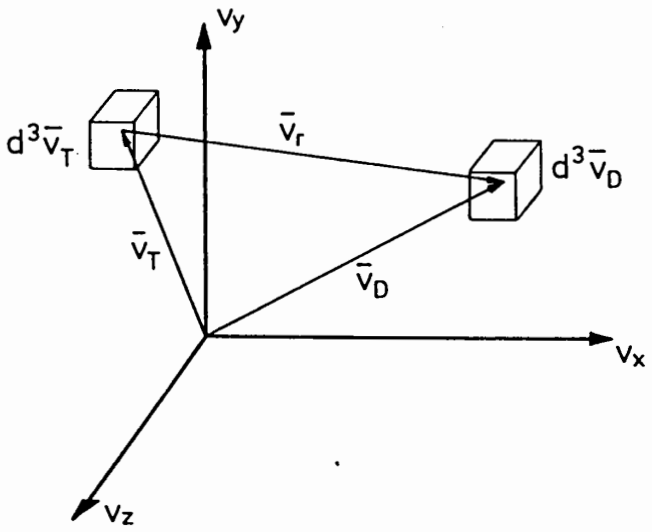

Fig. 1.3. Relative hastigheder mellem deuterium- og tritiumpartikler.

Vi betragter et homogent fusionsplasma med tæthederne n_D og n_T af henholdsvis deuterium og tritium. Vi ser altså på et plasma, hvis energiproduktion er baseret på processen (III). Lad plasmaets temperatur være T.

Partiklerne i plasmaet bevæger sig med alle mulige hastigheder. Fordelingsfunktionen i hastighedsrummet for en gas af termiske partikler med tætheden n og temperaturen T er givet ved Maxwellfordelingen

Maxwellfordelingen

$$f(v_x, v_y, v_z) = n\left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2\kappa T}\right\}, \qquad (1.4)$$

hvor m er partiklernes masse, og Boltzmanns konstant $\kappa = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K.* Begrebet fordelingsfunktioner er diskuteret i Appendiks 1, hvor der også er givet et resumé af visse egenskaber ved termiske gasser beregnet ud fra fordelingsfunktionen.

Vi benævner fordelingsfunktionerne for de to komponenter i fusionsplasmaet deuterium og tritium med henholdsvis f_D og f_T. Begge fordelingsfunktioner har formen (1.4), blot erstattes m med henholdsvis deuteriummassen m_D og tritiummassen m_T, og n med n_D og n_T. For at beregne reaktionshastigheden i dette plasma ser vi først på de deuteriumkerner, der har deres hastighedsvektor i hastighedsrumelementet $d^3\mathbf{v}_D$ omkring $\mathbf{v}_D$. Se Fig. 1.3. Tætheden i plasmaet af disse partikler er $f_D(\mathbf{v}_D)\, d^3\mathbf{v}_D$. Vi ser først på disse deuteriumkerners reaktion med de tritiumkerner, hvis hastighedsvektor ligger i hastighedselementet $d^3\mathbf{v}_T$ omkring $\mathbf{v}_T$. De nævnte deuteriumkerner strømmer gennem tritiumkernerne med den relative hastighed $\mathbf{v}_r = \mathbf{v}_D - \mathbf{v}_T$. Reaktionshastigheden mellem de to partikelgrupper bliver, jfr. (A2.1).

$$v_r \sigma_{DT}(v_r) f_D(\mathbf{v}_D) d^3\mathbf{v}_D f_T(\mathbf{v}_T) d^3\mathbf{v}_T \, .$$

Nu reagerer gruppen af deuteriumkerner imidlertid med tritiumkerner med alle hastigheder, vi får derfor deuteriumgruppens reaktionshastighed med hele tritiumplasmaet ved at integrere ovenstående udtryk over alle $\mathbf{v}_T$-værdier. Yderligere er det ikke blot den udvalgte gruppe af deuteriumkerner, men deuteriumkerner med alle hastigheder, der reagerer med tritium plasmaet. For at få den endelige reaktionshastighed i plasmaet skal vi derfor også in-

---

*Inden for plasmafysikken måles temperatur ofte i energienheder i stedet for i Kelvin. Til en temperatur på T K svarer i energienheder

Temperatur i energienheder

$\kappa T = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ [T] J = $0{,}86 \cdot 10^{-4}$ [T] eV.

En temperatur på 1 eV svarer altså til 11600 K. For partikler i en gas med temperaturen T er κT den mest sandsynlige translatoriske kinetiske energi, og $\kappa T/2$ er den gennemsnitlige kinetiske energi pr. frihedsgrad. κT er altså en karakteristisk kinetisk energi for disse partiklers termiske bevægelse.

tegrere udtrykket over alle $\mathbf{v}_D$-værdier. Vi får altså for reaktionshastigheden for D-T-reaktionen

$$R_{DT}(T) = \int_{\mathbf{v}_D}\int_{\mathbf{v}_T} v_r \sigma_{DT}(v_r) f_D(\mathbf{v}_D) f_T(\mathbf{v}_T) d^3\mathbf{v}_T d^3\mathbf{v}_D \ , \qquad (1.5)$$

hvor integrationerne skal udføres over alle 3 hastighedskomponenter fra $-\infty$ til $+\infty$.

Nu er integralet i (1.5) blot $<\mathrm{v_r}\,\sigma_{DT}(\mathrm{v_r})>\,\mathrm{n_D}\,\mathrm{n_T}$, jfr. eksemplerne i Appendiks 1.2. Reaktionshastigheden kan altså udtrykkes

$$R_{DT}(T) = n_D n_T \langle \sigma_{DT}(v_r) v_r \rangle \ . \qquad (1.6)$$

$<\sigma_{DT}(\mathrm{v_r})\mathrm{v_r}>$ er beregnet som funktion af temperaturen ved numerisk integration af (1.5). For en valgt $\mathrm{v_r}$-værdi er den tilsvarende $\sigma_{DT}(\mathrm{v_r})$-værdi opnået ved aflæsning på DT-kurven på Fig. 1.2 ud for energien $\mathrm{m_D v_r^2/2}$. Kurven mærket D-T på Fig. 1.4 repræsenterer resultaterne af de numeriske beregninger.

Det er tit en fordel at have et analytisk udtryk som tilnærmelse for en beregnet kurve. Det fremgår af Fig. 1.4, at i iontemperaturintervallet 6 keV $<\kappa \mathrm{T_i} <$ 20 keV er den punkterede linie gennem punktet (10 keV, 10^{-22} $\mathrm{m^3 s^{-1}}$) en god tilnærmelse til de beregnede $<\sigma_{DT}(\mathrm{v_r})\mathrm{v_r}>$-værdier. Ligningen for denne rette linie er

$$\langle \sigma_{DT}(v_r) v_r \rangle = 10^{-24} \left[(\kappa T_i)^2 \right] m^3 s^{-1} \ ; \qquad (1.7)$$

κT i keV .

(1.7) er altså et godt, tilnærmet analytisk udtryk for den beregnede kurve i det nævnte temperaturinterval.

Numeriske beregninger af $<\sigma(\mathrm{v_r})\mathrm{v_r}>$ er også udført for D + D-reaktionerne (I) og (II) og for D + ^{3}He-reaktionen (IV). De opnåede resultater for disse reaktioner er mærket henholdsvis D-D og D-^{3}He på Fig. 1.4.

Det skal bemærkes, at for D + D-reaktionerne er reaktionshastigheden givet ved

$$R_{DD}(T) = \frac{n_D^2}{2} \langle \sigma_{DD}(v_r) v_r \rangle \ . \qquad (1.8)$$

Faktoren 1/2 på højre side af (1.8) skyldes, at der her arbejdes med reaktioner mellem identiske partikler. Når man ved beregning af $\mathrm{R_{DD}}$ udfører dobbelt-

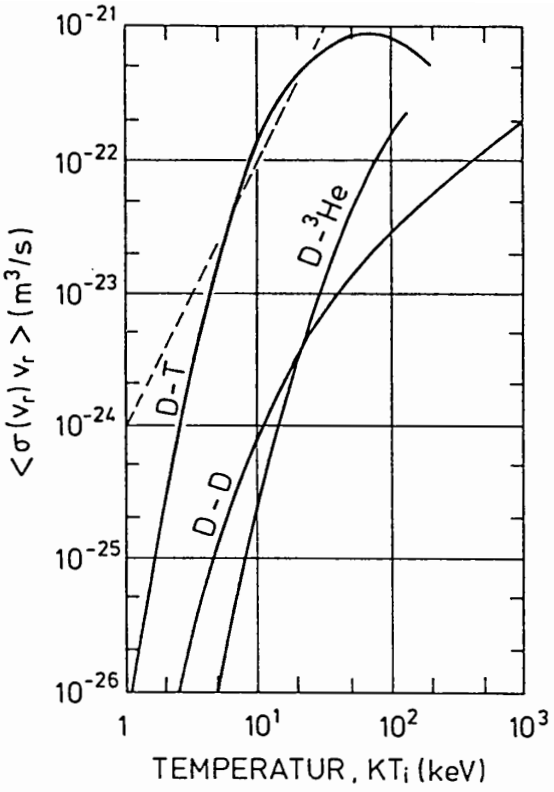

Fig. 1.4. $<\sigma(v_r)v_r>$ *som funktion af temperaturen for 3 fusionsprocesser. Kurven mærket D-D repræsenterer summen af de to D + D-reaktioner (I) og (II).*

integrationer svarende til (1.5), får man alle reaktioner med 2 gange; derfor skal resultatet halveres. Udtrykket (1.8) med $<\sigma_{DD}(v_r)v_r>$-værdier taget fra D-D-kurven i Fig. 1.4 repræsenterer summen af de lige store reaktionshastigheder for de to D + D-processer (I) og (II).

D + T-processens fordele

Af Fig. 1.4 ses, at ved en given temperatur er reaktionshastighederne for D+ D- og D + ^{3}He-reaktionerne karakteristisk én til to størrelsesordener lavere end for D + T-reaktionen. Tilsvarende er temperaturen ved samme reaktionshastighed op mod en størrelsesorden lavere for D + T-reaktionen end for de to andre reaktioner. Det er dette lavere krav til temperaturen, der gør D + T-processen mere attraktiv end de to andre, og det er derfor, at man regner med, at de første fusionsreaktorer vil komme til at arbejde med D + T-processen.

Med de ovenfor fundne reaktionshastigheder er det let at finde effekttætheden, der produceres i et fusionsplasma. R(T) skal blot multipliceres med den energi, der frigøres ved hver proces. For D-T-reaktionen fås effekttætheden

Effekttæthed i D + T-plasma

$$P_{DT} = 2,82 \cdot 10^{-12} [n_D n_T \langle \sigma_{DT}(v_r) v_r \rangle] \frac{W}{m^3}; \qquad (1.9)$$

n i m^{-3}, $\langle \sigma v \rangle$ i $m^3 s^{-1}$,

som ved hjælp af udtrykket (1.7) kan skrives på den tilnærmede analytiske form

$$P_{DT} \simeq 2,82 \cdot 10^{-42} \left[n_D n_T (\kappa T_i)^2\right] \frac{MW}{m^3}; \qquad (1.10)$$

n i m^{-3} , κT i keV ,

der er en god tilnærmelse i intervallet 6 keV $< \kappa T_i <$ 20 keV.

For et fusionsplasma, der består af lige dele deuterium og tritium, er $n_D = n_T = n/2$, og (1.10) bliver

$$P_{DT} = 0,7 \cdot 10^{-42} \left[n^2 (\kappa T_i)^2\right] \frac{MW}{m^3}; \qquad (1.11)$$

n i m^{-3} , κT i keV .

Bemærk, at i (1.11) er størrelsen i den kantede parentes kvadratet på ionernes partialtryk, $p_i = n\kappa T_i$. Indføres dette, kan (1.11) skrives på formen

$$P_{DT} = 0,27 \left[p_i^2\right] \frac{MW}{m^3}; \qquad (1.12)$$

p i bar (1 bar = 10^5Pa = 10^5 N m^{-2}) .

Af (1.12) fremgår, at for at få produceret en fusionseffekttæthed på 1 MW/m^3 i en fusionsreaktor, kræves et ionpartialtryk på ca. 2 bar. Tages elektronernes partialtryk med, kommer vi op på ca. 4 bar. Disse overvejelser gælder kun for iontemperaturer i intervallet 6 keV $< \kappa T_i <$ 20 keV.

β-forholdet

For et plasma, der holdes indesluttet i et påtrykt magnetfelt B_o, er forholdet

$$\beta \equiv \frac{n(\kappa T_e + \kappa T_i)}{B_o^2/2\mu_o}, \qquad (1.13)$$

altså forholdet mellem partikeltryk og det påtrykte magnetfelttryk, en væsentlig parameter. Den fysiske betydning af ß-forholdet diskuteres i Kap. 5. Det viser sig, at en given magnetfeltkonfiguration kun er i stand til at holde et plasma indesluttet, hvis dets ß-værdi er tilstrækkelig lille. For den almindelige tokamakkonfiguration er $ß_{max}$ ca. 5%. Indsættes (1.13) i (1.11) findes

$$P_{DT} = 4,3 \left[\frac{\beta^2 B_0^4}{(1 + T_e/T_i)^2} \right] \frac{MW}{m^3} \; ; \qquad (1.14)$$

B_0 i Tesla (β er et rent tal).

(1.14) viser, at for at opnå størst mulig effekttæthed i en fusionsreaktor er det væsentligt at arbejde med så stærkt magnetfelt som teknisk muligt og også at operere med størst mulig ß-værdi.

I et fusionsplasma bestående af deuterium og tritium i nogenlunde samme koncentration vil der naturligvis også ske D+D-processer. Da $<\sigma(v_r)v_r>$ for D+D-processerne er meget mindre end for D+T-processen, er D+D-reaktionernes bidrag til energiproduktionen forsvindende.

Effekttæthed i rent D-plasma

I et rent deuteriumplasma forløber først og fremmest processerne (I) og (II), i gennemsnit er energiudbyttet pr. reaktion (3,25 + 4,0)/2 MeV = 3,63 MeV. Nu dannes der imidlertid ved hver reaktion af typen (II) en tritiumkerne, som kan reagere med en deuteriumkerne efter reaktionen (III). Denne reaktion sker hurtigt, da reaktionshastigheden for D+T-reaktioner er stor, se Fig. 1.4. Der kommer altså et extra energibidrag ved hver type (II) reaktion på 17,6 MeV. I princippet får vi et lignende extra bidrag fra hver type (I) reaktion, idet den dannede ^{3}He-kerne kan reagere med en D-kerne efter reaktionen (IV). Da imidlertid reaktionshastigheden for denne proces er lav for relevante temperaturer (< ca. 50 keV), se igen Fig. 1.4, vil den forløbe langsomt, og bidraget kan derfor negligeres. Pr. D+D-reaktion frigøres altså i gennemsnit (3,25 + (4,0 + 17,6))/2 MeV = 12,4 MeV.

Effekttætheden i et deuteriumplasma kan altså med tilnærmelse skrives

$$P_{DD} \simeq 10^{-12} \left[n_D^2 \langle \sigma_{DD}(v_r) v_r \rangle \right] \frac{W}{m^3} \; ; \qquad (1.15)$$

n i m^{-3}, $\langle \sigma v \rangle$ i $m^3 s^{-1}$.

1.2.6. Lawson-kriteriet og antænding

I det foregående underafsnit er energiproduktionen i et fusionsplasma diskuteret. Vi skal her se på betingelserne for, at denne energiproduktion bliver stor nok til, at den kan udnyttes i et fusionskraftværk. Det er allerede nævnt, at første generation af fusionsreaktorer må forventes at komme til at arbejde med D+T-reaktionen (III), da det er denne reaktion, der stiller de mindste krav til temperaturen. I dette afsnit vil vi derfor kun betragte et D+T-plasma, og vi vil lade det bestå af en lige blanding af deuterium og tritium, altså have

$n_D = n_T$. Vi vil desuden antage, at både deuterium, tritium og elektronerne har temperaturen T. Vi ser på en rumenhed (1 m^3) af et sådant fusionsplasma, som vi tænker os holdt indesluttet i en reaktorbeholder, fra hvis vægge det holdes isoleret ved hjælp af magnetfelter. Den energi, der udstråles fra plasmaet, absorberes i reaktorbeholderens vægge, hvorfra den via et kølesystem føres til en generator og omsættes til elektrisk energi. For at opretholde den nødvendige temperatur må en del af den elektriske energi føres tilbage i plasmaet. Lad effektiviteten, hvormed den i reaktorvæggen afsatte energi kan omdannes til elektricitet og genindføres i plasmaet, være η. Lawson-kriteriet, som nu skal diskuteres, giver betingelserne for opretholdelse af energibalance i en fusionsreaktor.

Den i fusionsplasmaet producerede effektktæthed, P_{DT}, er allerede beregnet og givet i (1.9), der med $n_D = n_T = n/2$ giver

$$P_{DT} = 0,7 \cdot 10^{-12} \left[n^2 \langle \sigma_{DT}(v_r) v_r \rangle\right] \frac{W}{m^3} ; \qquad (1.16)$$

n i m^{-3}, $\langle \sigma v \rangle$ i $m^3 s^{-1}$.

Bremsestrålingstab

Vi vil foreløbig antage, at hele effekttætheden P_{DT} udstråles fra plasmaet og absorberes i væggene.

Det er kendt fra elektrodynamikken, at ladede partikler udsender elektromagnetisk stråling, når de accelereres. Når elektronerne i et plasma bevæger sig omkring i deres termiske bevægelser, udsættes de for accelerationer, hver gang de kommer så tæt til ionerne, at deres baner afbøjes. Et plasma udsender derfor elektromagnetisk stråling, som på grund af den måde, hvorpå den er genereret, kaldes bremsestråling.

Et plasma af den størrelse, som man kan forestille sig i en fusionsreaktor, er et optisk tyndt legeme, dvs. indtrængningsdybden for elektromagnetisk stråling er lang sammenlignet med plasmaets dimensioner. Al den bremsestråling, der genereres i plasmaet, vil derfor udstråles, og den udstrålede effekt bliver proportional med plasmavolumenet. Dette er i modsætning til udstrålingen fra et, sort legeme, hvor den udstrålede effekt er proportional med overfladen. Det kan vises, at effekttætheden i bremsestrålingen er givet ved følgende generelle formel [2], [5], [9], [14]

$$P_b = 5,4 \cdot 10^{-37} \left[n_e \sum_j n_{ij} Z_j^2 (\kappa T_e)^{1/2} \right] \frac{W}{m^3} ; \qquad (1.17)$$

n i m^{-3}, κT i keV.

n_e er elektrontætheden, og n_{ij} er tætheden af ioner med ladningstal Z_j. κT_e er elektrontemperaturen. Da plasmaet udadtil er elektrisk neutralt, har vi $n_e =$

$\Sigma_j n_{ij} Z_j$. For det rene D + T-plasma, vi betragter, tager (1.17) formen

$$P_b = 5{,}4 \cdot 10^{-37} \left[n^2 (\kappa T_e)^{1/2} \right] \frac{W}{m^3} \; ; \qquad (1.18)$$

n i m^{-3}, κT i keV.

Et plasma indesluttet i et magnetfelt vil også tabe energi til væggene i den omgivende beholder på andre måder end ved de principielt uundgåelige bremsestrålingstab i (1.18). F.eks vil ladede partikler diffundere gennem magnetfeltet og afgive deres energi til væggene, ligeledes kan konvektion og turbulens føre energi fra plasmaet til væggene, også forøgede bremsestrålingstab, som skyldes urenheder i plasmaet ved høje Z-værdier, vil føre energi til væggene.

Energiindeslutningstid

Som mål for feltkonfigurationens evne til at holde den tilførte energi indesluttet i plasmaet defineres energiindeslutningstiden, τ_E, som den karakteristiske tid plasmaets kinetiske energi holdes indesluttet (idet der ses bort fra de uundgåelige bremsestrålingstab givet i (1.18)). τ_E er defineret som:

$$\tau_E = \frac{E_{kin}}{P_t} \; , \qquad (1.19)$$

hvor E_{kin} er plasmaets kinetiske energitæthed, og P_t er den effekttæthed, som forlader plasmaet ved de ovennævnte tabsmekanismer, hvor P_b igen ikke medregnes.

I et plasma med temperaturen, T, og en elektron- og iontæthed på n er $E_{kin} = 3n\kappa T$. Tabseffekten, P_t, udtrykkes herefter bekvemt ved:

$$P_t = \frac{3n\kappa T}{\tau_E}$$

eller

$$P_t = 4{,}8 \cdot 10^{-16} \left[\frac{n\kappa T}{\tau_E} \right] \frac{W}{m^3} \; ; \qquad (1.20)$$

κT i keV, n i m^{-3}, τ_E i s.

For at opretholde temperaturen i plasmaet må summen af tabene af partiklernes kinetiske energi, $P_b + P_t$, balanceres af den energi, der kan føres tilbage fra generatoren, altså af $\eta(P_b + P_t + P_{DT})$. Ligningen

$$P_b + P_t \leq \eta(P_b + P_t + P_{DT}) \tag{1.21}$$

giver efter indsættelse af (1.16), (1.18) og (1.20)

$$n\tau_E \geq \left[\frac{4{,}8 \cdot 10^{-16}\kappa T}{\frac{\eta}{1-\eta}0{,}7 \cdot 10^{-12}\langle\sigma_{DT}(v_r)v_r\rangle - 5{,}4 \cdot 10^{-37}(\kappa T)^{1/2}}\right]\frac{s}{m^3}\,; \qquad \textit{Lawson-kriteriet}$$

$$\kappa T \text{ i keV}\,,\ \langle\sigma_{DT}(v_r)v_r\rangle \text{ i } m^3s^{-1}\,. \tag{1.22}$$

Fordelen ved større tæthed er en konsekvens af, at P_{DT} er proportional med n^2, mens P_t kun er proportional med n.

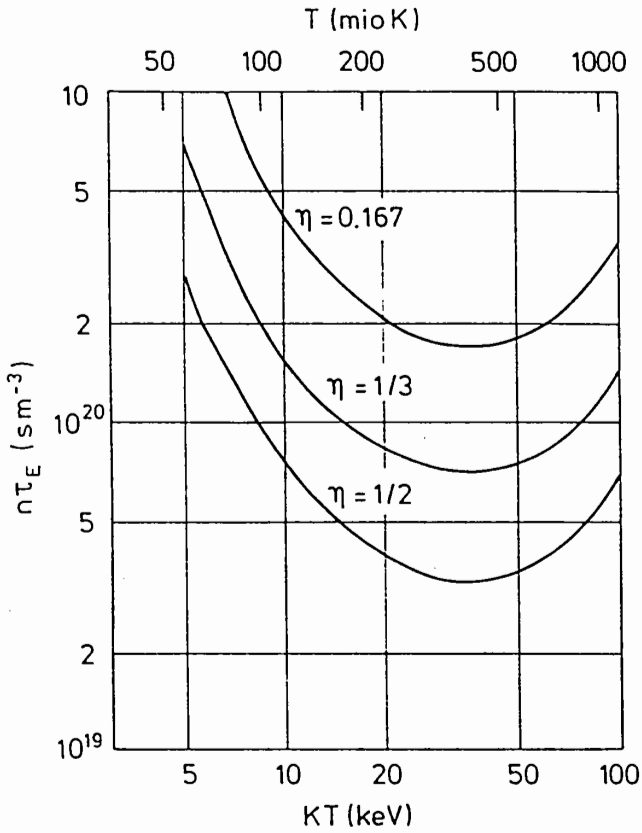

Fig. 1.5. Lawson-kriteriet for et D-T-plasma beregnet for 3 η-værdier. Kurven for η = 0.167 svarer også til antænding i et plasma, hvor α-partiklerne er indesluttet.

Ligning (1.22) repræsenterer Lawson-kriteriet; det siger, at for blot at opretholde temperaturen i et fusionsplasma og dermed at holde fusionsprocesserne igang må produktet af plasmatætheden og energiindeslutningstiden mindst være som givet ved (1.22). Skal der være en nettoenergiproduktion, må $n\tau_E$ være større. På Fig. 1.5 er der vist kurver over minimumsværdierne af $n\tau_E$ som funktion af temperaturen for de tre η-værdier 0,5, 0,33 og 0,167.

Som det fremgår af Fig. 1.5, skal et D+T-fusionsplasma for at producere nettoenergi ved en temperatur af f.eks. 100 mio K holdes indesluttet så effektivt, at $n\tau_E$-produktet er ca. $2 \cdot 10^{20}$ $m^{-3}s$ afhængigt af den effektivitet, hvormed man kan føre energi tilbage i plasmaet. Ved højere temperatur er kravet til $n\tau_E$ noget mindre.

Tritiumproduktion

Man kan gøre forskellige forudsætninger ved beregninger af kurver som dem, der er vist på Fig. 1.5. Antager man f.eks., at man lader de ved D+T-reaktionen (III) dannede neutroner reagere med lithium i en kappe omkring reaktoren efter processen

$$(VI)\ {}^6Li + n \rightarrow T + {}^4He + 4{,}8\ MeV\,,$$

får man ekstra 4,8 MeV dannet ved hver D+T-reaktion. Tager man dette extra bidrag med i beregningerne, forskydes kurverne på Fig. 1.5 ca. en faktor 1,5 mod lavere $n\tau_E$-værdier.

At lade de i reaktoren dannede neutroner reagere med lithium efter processen (VI) eller efter processen

$$(VII)\ {}^7Li + n \rightarrow T + {}^4He + n - 2{,}5\ MeV$$

har desuden den fordel, at man får dannet tritium, som så kan indføres i fusionsplasmaet som frisk brændstof. Det er nødvendigt at danne tritium ved en kerneproces, da det ikke findes i naturen. Vælger man at benytte processerne (VI) og (VII), bliver det de naturlige forekomster af lithium, der sætter en grænse for, hvor meget energi, der kan produceres i D+T-fusionsreaktoren. Man regner med, at der i hvert fald er lithiumforekomster nok til produktion af flere hundrede Q i D+T-reaktorer.

Antænding i fusionsplasma

Der er også en mulighed for, at et D+T fusionsplasma kan brænde, uden at der tilbageføres energi til at opretholde temperaturen. De α-partikler, som dannes ved D+T-processen, kan, da de er elektrisk ladede, holdes indesluttet i plasmaet af det magnetiske felt. De vil derfor direkte afgive deres energi til plasmaet gennem stød med partiklerne. Da α-partiklerne bærer 20% af den ved fusionsprocesser dannede energi (se bemærkningerne efter fusionsprocesserne (I)-(V)), er betingelsen for, at processerne kan opretholde sig selv, eller at plasmaet er antændt, at

$$0{,}2P_{DT} \geq P_b + P_t\,. \qquad (1.23)$$

Med $\eta = 0{,}167$ er (1.21) identisk med (1.23). Kurven mærket $\eta = 0{,}167$ på Fig. 1.5 viser altså også betingelserne for antænding i en D+T-reaktor, hvor α- partiklerne afgiver deres energi direkte i plasmaet. Har plasmaet (T, $n\tau_E$)-værdier, der ligger over denne kurve, kan fusionsprocesserne forløbe uden tilbageføring af energi til plasmaet. Energien på de dannede α-partikler er stor nok til at opveje tabene, og plasmaet er antændt.

Alternativ energiindeslutningstid

I (1.19) er energiindeslutningstiden τ_E defineret alene ud fra de tab fra plasmaet, der ikke skyldes den uundgåelige bremsestråling. Denne definition bruges ofte i litteraturen, f.eks. [9] og [11], og den har den fordel, at τ_E går mod uendelig for ideelt isolerede plasmaer. Imidlertid er det tit mere naturligt at definere energiindeslutningstiden ved

$$\tau_E' = \frac{3n\kappa T}{P_b + P_t}\,, \tag{1.24}$$

således at τ_E' er et virkeligt mål for den tid, den termiske energi holdes indesluttet i plasmaet. τ_E' er jo også den henfaldstid for plasmaenergien, der umiddelbart måles eksperimentelt. For kurverne på Fig. 1.5 betyder det næsten intet, hvilken af definitionerne der benyttes. Med definitionen (1.24) bliver (1.22)

$$n\tau_E' = \left[\frac{4{,}8\cdot 10^{-16}\kappa T}{\frac{\eta}{1-\eta}0{,}7\cdot 10^{-12}\langle\sigma_{DT}(v_r)v_r\rangle}\right] sm^{-3}\,; \tag{1.25}$$

κT i keV , $\langle\sigma v\rangle$ i m^3s^{-1} ,

som altså kun afviger fra (1.22) derved, at det sidste led i nævneren mangler. For κT-værdier > 10 keV er dette led småt sammenlignet med det resterende led, og det er derfor uvæsentligt for beregningerne af $n\tau_E$-værdierne.

Bemærk, at for ideel energiindeslutning, hvor $P_t \to 0$ og $\tau_E \to \infty$, giver (1.24) og (1.18)

$$n\tau_E' = n\frac{3n\kappa T}{P_b} = 8{,}9\cdot 10^{20}\left[(\kappa T)^{1/2}\right] sm^{-3}\,; \tag{1.26}$$

κT i keV

1.2.7. Et tilbageblik over fusionsforskningen

Fusionsforskningen startedes i midten af 1950erne. Da man med sprængningen af de første brintbomber i begyndelsen af 50erne havde vist, at man kunne frigøre fusionsenergi, opstod ønsket om også at benytte fusionsenergi-

en til fredelige formål. I begyndelsen var optimismen stor, man regnede med, at det højst ville tage 25 år, inden de første fusionskraftværker kunne realiseres. Det viste sig imidlertid meget snart, at problemerne var store. Man koncentrerede sig først om at finde metoder til at opvarme et fusionsplasma til de ca. 100 mio K, som er nødvendige, og at holde det indesluttet i passende magnetfeltkonfigurationer så længe, at kravene om $n\tau_E$ > ca. $2 \cdot 10^{20}$ $m^{-3}s$ kunne opfyldes. Især problemet om den magnetiske indeslutning har vist sig vanskeligt. Det var først i slutningen af 60erne, der kom et væsentligt gennembrud. Russiske forskere rapporterede i 1968 om nogle lovende resultater, som de havde opnået i en magnetfeltkonfiguration, som de kaldte en tokamak. Straks efter offentliggørelsen af disse russiske resultater begyndte de fleste fusionslaboratorier over hele verden at arbejde med tokamakkonfigurationen. Udviklingen i tokamakforskningen gennem de sidste godt 15 år er illustreret på Fig. 1.6, hvor de opnåede resultater er vist i et (T, $n\tau_E$)-diagram.

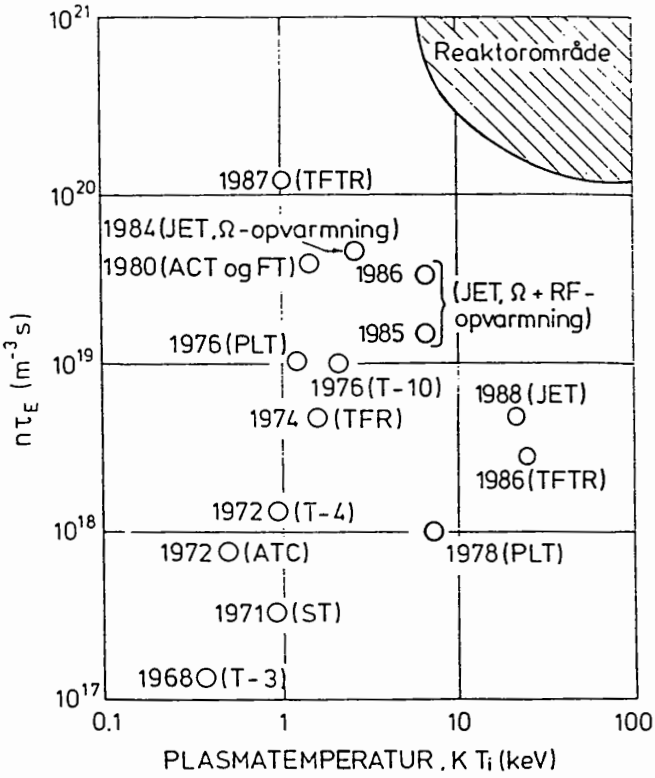

Fig. 1.6. Udviklingen inden for tokamakforskningen i tiden fra 1968 til 1986. Russiske tokamakker: (T-3), (T-4) og (T-10). Amerikanske tokamakker: (ST), (ACT), (PLT) og (TFTR). Europæiske tokamakker: (TFR), (FT) og (JET).

Hvert enkelt resultat er mærket med et årstal, der viser hvornår det er opnået, og med navnet på den eksperimentelle opstilling, hvori det er opnået. Man ser, at fremskridtene i den forløbne periode har været store. Der er opnået mere end en faktor 10 i temperaturen, og man er nu oppe på over 100

mio K. Hvad $n\tau_E$-produktet angår, er resultaterne forbedret med mere end 2 størrelsesordener, og der mangler nu mindre end en faktor 10, inden de nødvendige resultater er nået. Midt i 1980erne har resultater fra JET og andre store eksperimenter vist, at de ret gode $n\tau_E$-resultater, der tidligere er opnået med rent Ohmsk opvarmning, ikke umiddelbart kan opretholdes, når man vil øge temperaturen yderligere ved hjælp af supplerende opvarmningsmetoder, som rf-opvarmning og neutral injektion. Selv om dette giver anledning til nogen bekymring, tror de fleste i fusionsforskerkredse, at de resultater, der vil blive opnået med de eksisterende store eksperimentelle opstillinger i løbet af de sidste år af 1980erne og begyndelsen af 90erne, vil være af en sådan art, at de enten bringer os op i reaktorområdet på Fig. 1.6 og dermed opfylder Lawson-kriteriet, eller i hvert fald vil kunne bruges til at designe et nyt eksperiment, der med meget stor sandsynlighed vil kunne komme til at arbejde i reaktorområdet.

1.2.8. Fusionsforskningen fremover

Selv om det i løbet af 80erne lykkes at løse det plasmafysiske problem at opfylde Lawson-kriteriet, kan man ikke umiddelbart begynde at bygge et fusionskraftværk. Der er en hel række teknologiske problemer, der først skal løses. På Fig. 1.7 er det vist på skitseform, hvordan man forestiller sig, at princippet i et kommende fusionskraftværk vil blive.

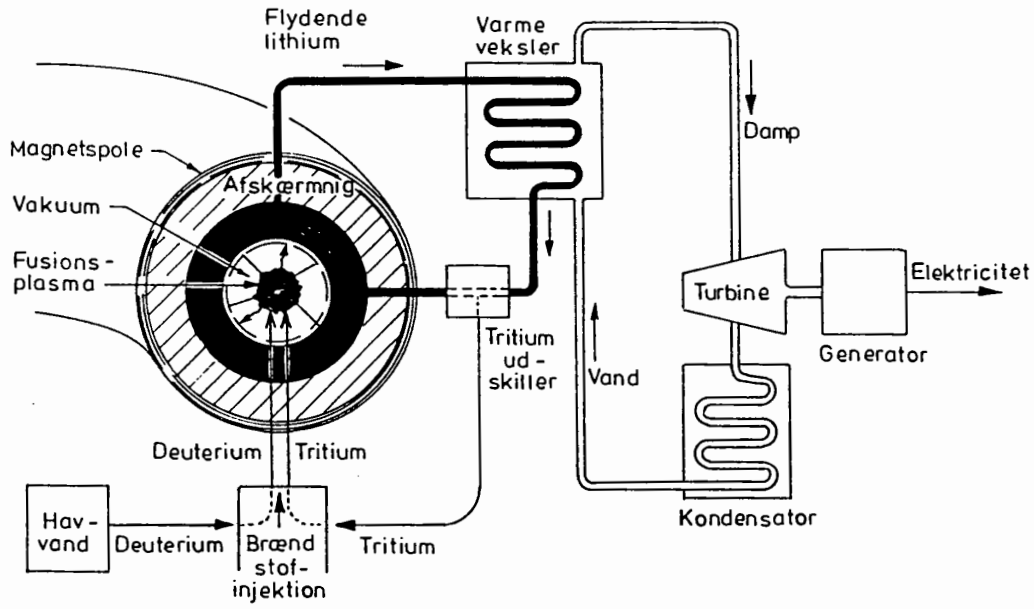

Fig. 1.7. Principtegning af fusionskraftværk.

Teknologiske problemer

Et af de største teknologiske problemer er at finde et passende materiale til den indre væg i det kammer, der omgiver fusionsplasmaet. Den skal kunne absorbere den store energiflux fra plasmaet uden at ødelægges. Samtidigt er det vigtigt, at den ikke sender urenheder i form af tunge kerner med høje Z-tal tilbage i plasmaet. Som det fremgår af ligning(1.17),vil f.eks. 1% jern med $Z = 26$ forøge bremsestrålingstabene fra plasmaet med en faktor på ca. 7. Et andet problem er, at det er nødvendigt at benytte superledende spoler til at generere magnetfelterne for at undgå for store strømvarmetab. Endnu er teknikken inden for superledning ikke udviklet så langt, at så store spolesystemer kan bygges.

Fusionsreaktorens radioaktivitet

Det er også et problem, at der dannes neutroner ved fusionsprocesserne. Nogle af disse neutroner vil danne radioaktive kerner, når de absorberes i strukturen omkring fusionsreaktorkammeret. Når et fusionskraftværk har kørt nogen tid, kan det derfor kun vedligeholdes ved fjernbetjening; igen en teknik, der må udvikles.

Som det fremgår af Fig. 1.7 tænker man sig tritium formeret i en lithiumkappe omkring fusionsplasmaet. Denne lithiumkappe kan samtidigt fungere som kølevæske, der transporterer den dannede varmeenergi til en el-generator. Da tritium er et ubehageligt radioaktivt stof, skal man udvikle en sikker teknik til at holde det indesluttet.

De ovenstående eksempler er kun et udvalg af de mange endnu uløste problemer, som fusionsforskningen må løse, før der kan bygges en fusionsreaktor. Man regner naturligvis med, at alle de problemer, der skal løses, vil blive løst. De fleste fusionsforskere mener nu, at det vil blive teknisk muligt at bygge en demonstrationsfusionsreaktor i begyndelsen af næste århundrede.

2. PLASMABEGREBET

I sidste kapitel blev begrebet plasma defineret på den simplest mulige måde, nemlig som en gas bestående af ladede partikler, elektroner og ioner. I dette kapitel skal vi først se på, hvordan plasmaer dannes, og hvor de forekommer i naturen. Derefter omtales forskellige karakteristiske parametre, der bruges ved beskrivelse af plasmaer, og endelig benyttes disse parametre til at uddybe plasmadefinitionen.

2.1. Dannelse af Plasma. Saha-ligningen

Et plasma kan dannes ved opvarmning af en gas af neutrale partikler. Når temperaturen er blevet tilstrækkelig høj, vil der i gassen være partikler med så stor termisk energi, at de kan ionisere andre partikler, som de støder sammen med. Holdes temperaturen af en sådan gas konstant, vil der opstå en ligevægtstilstand, hvor der pr. tidsenhed dannes lige så mange ladede partikler ved stød, som der forsvinder ved rekombination. Ved hjælp af argumenter fra kvantemekanikken og fra den statistiske mekanik kan man beregne ligevægtsforholdet r mellem iontætheden n_i og neutraltætheden n_n som funktion af temperaturen. Resultatet, der normalt benævnes Saha-ligningen, er

$$r = \frac{n_i}{n_n} \simeq 3 \cdot 10^{27} \left[(\kappa T)^{3/2} n_i^{-1} \exp\left\{ -\frac{U}{\kappa T} \right\} \right] ; \qquad (2.1)$$

Saha-ligningen

κT i eV , n i m^{-3} , U i eV .

U er ioniseringsenergien. Saha-ligningen kan findes udledt og nærmere diskuteret i [4], her skal blot nævnes nogle af de fysiske principper, der er benyttet ved udledningen. For et system af mange partikler, evt. atomer, der kan eksistere i to energiniveauer, U_1 og U_2, og som har temperaturen, κT, siger den statistiske mekanik, at forholdet mellem populationsgraderne i de to niveauer er $(g_1/g_2) \exp\{-U/\kappa T\}$, hvor $U = U_2 - U_1$, og hvor g_1 og g_2 er degenerationsfaktorerne for de to niveauer. For ioniseringsproblemet, som vi betragter, er U_1-tilstanden det neutrale atom, mens U_2-tilstanden er det ioniserede elektron-ionpar. Herved bliver U lig ioniseringsenergien, der for hydrogen er 13,6 eV, medens g_1/g_n må beregnes ud fra komplicerede kvantemekaniske principper. Sådanne beregninger fører til faktoren foran eksponentialfunktionen i (2.1).

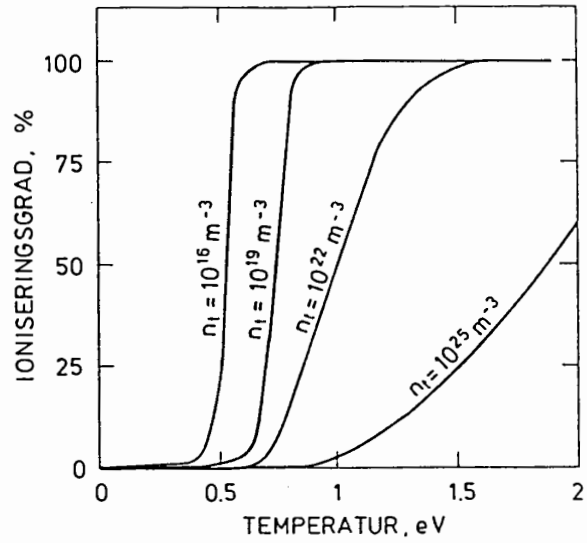

Fig. 2.1. Ioniseringsgraden i procent for hydrogen ved forskellige tætheder som funktion af temperaturen.

For en hydrogengas er kurver over ioniseringsgraden beregnet ved hjælp af ligning (2.1) og vist som funktion af temperaturen på Fig. 2.1. Ioniseringsgraden er defineret som n_i/n_t, hvor den totale tæthed $n_t = n_i + n_n$. Ioniseringsgraden er beregnet for følgende fire værdier for n_t: 10^{25} m^{-3}, 10^{22} m^{-3}, 10^{19} m^{-3} og 10^{16} m^{-3}. Den første værdi svarer stort set til tætheden ved STP- forhold, (standard temperature and pressure: 273 K og 1 atmosfære) medens 10^{16} m^{-3} svarer til partikeltætheden ved højvakuum.

Det bemærkes, at specielt for meget tynde hydrogengasser fås næsten 100% ionisering allerede ved $\kappa T \simeq 0{,}5$ eV, altså ved temperaturer, hvor den karakteristiske energi i den termiske bevægelse er mere end en størrelsesorden under ioniseringsenergien. Bemærk også, at især for tynde gasser er temperaturintervallet, hvorover ioniseringsgraden går fra 0 til 100%, meget smalt. Situationen minder om andre faseovergange, der finder sted over meget smalle temperaturintervaller: smeltning, fordampning mod konstant tryk, o.a.

2.2. Plasmaforekomster

Plasmaer forekommer både i naturen og som følge af menneskenes aktiviteter. På Fig. 2.2 er forskellige plasmaforekomster lagt ind i et tætheds-temperaturdiagram.

Interstellart plasma

Den største plasmaforekomst finder vi i det interstellare rum. Det fremgår af Fig. 2.2, at interstellart plasma karakteristisk har tætheder fra 10^6 til nogle gange 10^7 elektroner pr. m^3, medens temperaturen kan løbe op til flere tusinde K. Dette er et meget tyndt plasma; men da det interstellare rum er umådeligt stort, er mængden af stof, der her befinder sig i plasmatilstanden, overmåde stor. Alt i alt regner man med, at mere end 90% af alt stof i universet

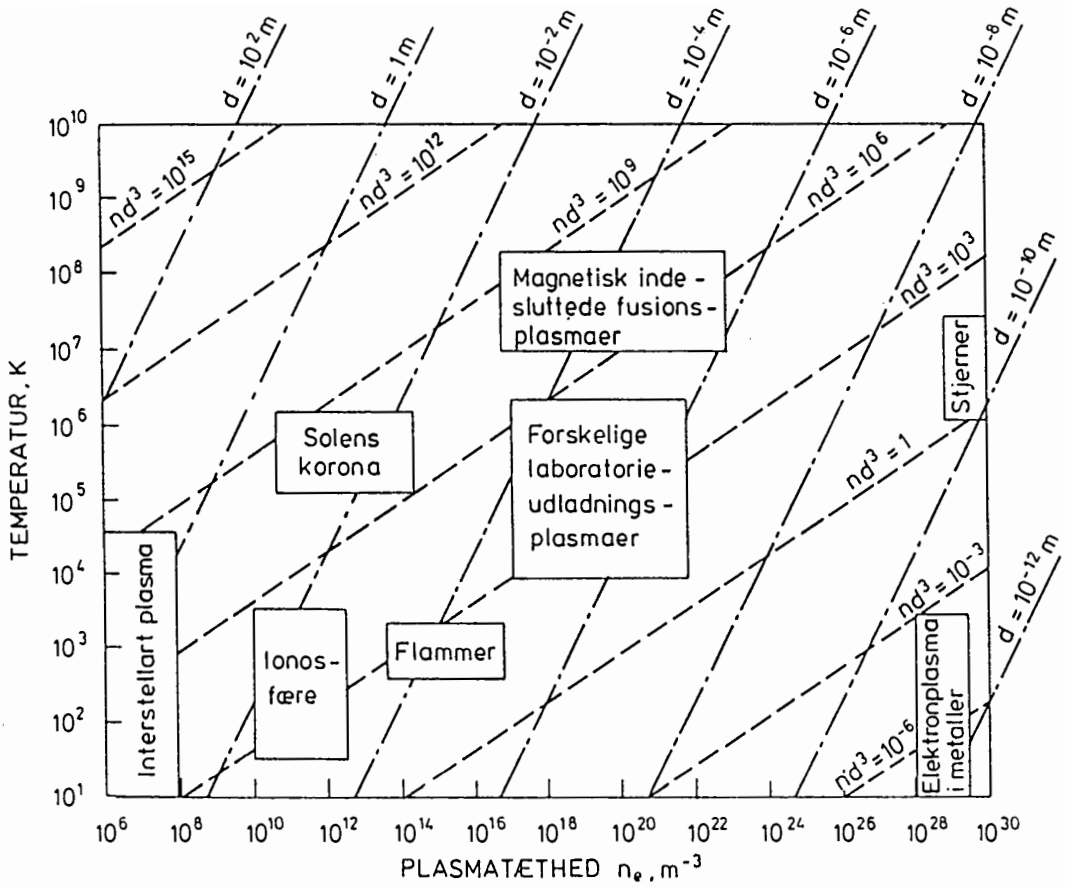

Fig. 2.2. Forskellige plasmaers placering i et (n_e,T)-diagram.

befinder sig i plasmatilstanden, og det interstellare plasma er den alt overvejende del heraf.

Plasma i fast stof

De degenererede plasmaer, som findes i diagrammets nederste højre hjørne, svarer til de ekstreme forhold, der findes i faste stoffer og bl.a. også til forholdene i metaller, hvor elektronerne jo er mere eller mindre fri til at bevæge sig rundt og derfor opfører sig som i et plasma.

Relativistiske plasma

Relativistiske plasmaer, dvs. plasmaer, hvor relativistiske effekter er af væsentlig betydning, optræder først ved temperaturer over ca. 10^9 K, altså langt over de menneskeskabte plasmaer midt i figuren. Relativistiske effekter har derfor lille betydning for de fleste plasmaer - og i hvert fald for fusionsplasmaer.

2.3. Karakteristiske Plasmaparametre

I dette afsnit betragtes et homogent plasma med given tæthed og temperatur, altså et plasma, som kan placeres på Fig. 2.2. Det antages, at det enten er et hydrogenplasma eller et plasma, hvor atomerne kun er én gang ioniserede. Vi har altså, at tætheden af elektroner og af ioner er den samme, $n_e = n_i = n$, og

at de henholdsvis har ladningerne -e og e = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$C. Elektronmassen kaldes m_e, og ionmassen m_i. Plasmaet befinder sig i et homogent magnetfelt B, og det har temperaturen T.

Ud fra de ovennævnte fysiske størrelser skal der nu udledes en række parametre, som karakteriserer det plasma, der betragtes. De udledte parametre har form som karakteristiske længder og tider, og de udgør et nyttigt sæt værktøj ved behandlingen af et givet plasma, bl.a. fordi en sammenligning af disse parametre fortæller hvilke approximationer, der er brugbare. Ligeledes kan det ofte ved behandling af et teoretisk problem betale sig at benytte disse parametre som naturlige enheder.

2.3.1. Middelafstand mellem partikler

Den simpleste karakteristiske længde, der kan udledes for det givne plasma, er middelafstanden mellem partiklerne. Idet der er n partikler pr. m^3, har hver partikel i snit et rumfang på n^{-1} m^3 til sin rådighed. Middelafstanden mellem partiklerne bliver da

$$a = n^{-1/3} . \qquad (2.2)$$

Middelafstand

2.3.2. Debye-længden

Den vigtigste karakteristiske parameter for et plasma er Debye-længden. Den repræsenterer to væsentlige plasmaegenskaber. For det første er Debye-længden den karakteristiske længde for rumligt henfald af elektriske felter i et plasma og udgør altså en afskærmningslængde for disse felter. For det andet viser det sig, at væsentlig afvigelse fra ladningsneutralitet kun kan eksistere over områder af plasmaet, hvis udstrækning er mindre end eller på størrelse med Debye-længden. Som det vil fremgå af de følgende udledninger, er de to egenskaber nært sammenknyttet i fysisk forstand.

Afskærmning af elektrisk felt

Lad os først se på afskærmningen af elektriske felter. Vi kan tænke os en kugle med den positive ladning Q placeret i plasmaet. Kuglen vil da tiltrække elektroner og frastøde ioner, hvorved der dannes et lag af negativ ladning omkring den. Dette lag virker som en afskærmning for Q's felt.

Hvis plasmaet er koldt, dvs. partiklernes kinetiske energi er forsvindende, kan en stor koncentrationsforskel mellem ioner og elektroner opretholdes uforstyrret omkring kuglen. I et ultratyndt lag omkring kuglen vil forskellen i koncentration derfor opbygges, indtil laget har en total ladning på -Q, og feltet fra kuglen dermed er fuldstændig elimineret. I et koldt plasma er afskærmningen af elektriske felter altså perfekt.

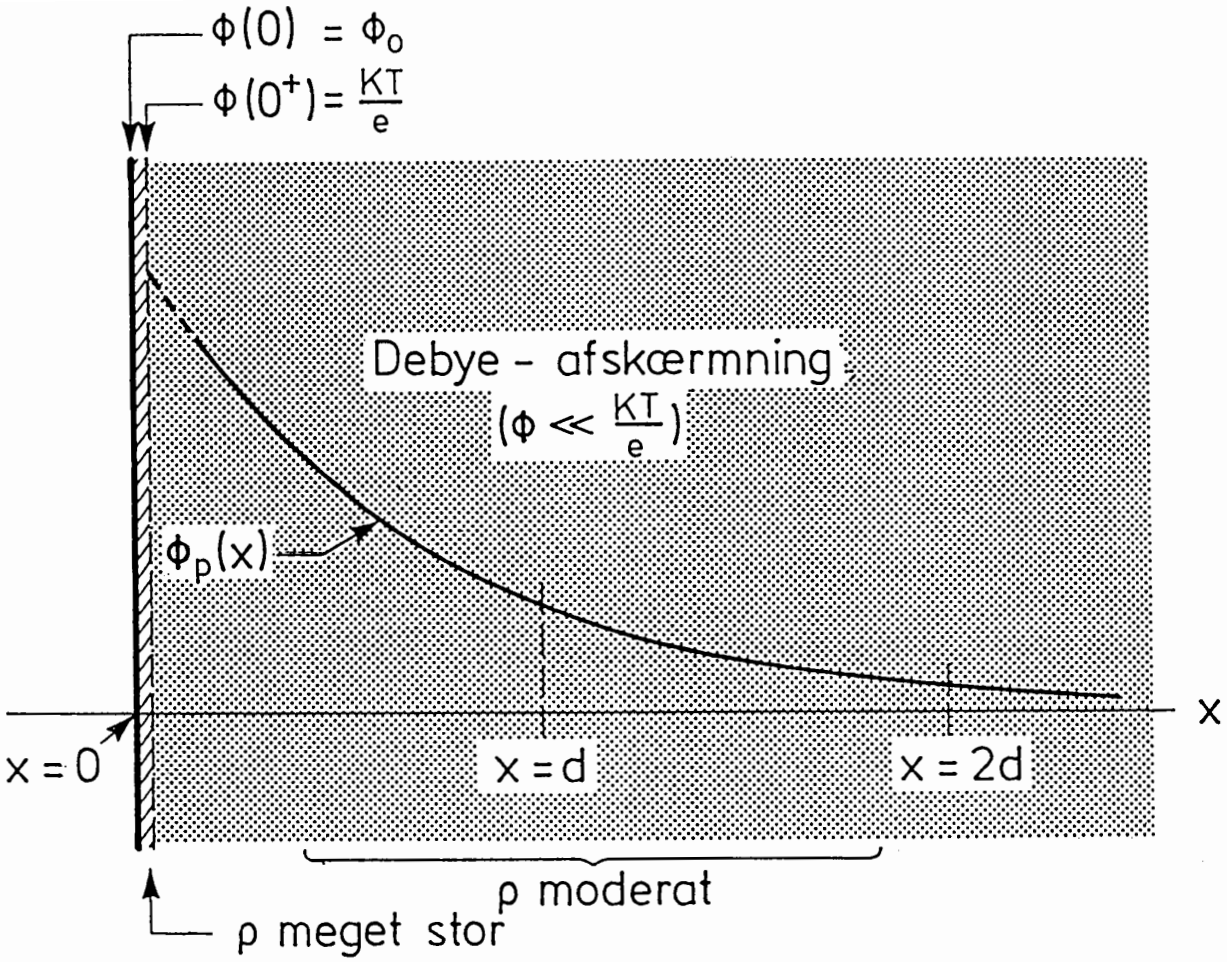

Fig. 2.3. Afskærmning af fladepotentiale i et plasma. Nærafskærmning samt Debye-afskærmning.

Er plasmaet derimod ikke koldt, og partiklernes kinetiske energi derfor ikke forsvindende, er det kun muligt at opretholde en koncentrationsforskel, hvis partiklerne befinder sig i en potentialbrønd, der er dybere end partiklernes kinetiske energi. For plasmapartiklerne er dybden af en elektrisk potentialbrønd givet ved $e\varphi$, hvor φ er forskellen i elektrisk potential mellem brønden og det uforstyrrede plasma, og e er elementarladningen.

Da der ved en given temperatur er tale om en fordeling af kinetisk energi, vil der altid være partikler med tilstrækkelig stor kinetisk energi til at bryde ud af potentialbrønden. Men først når potentialforskellen, $e\varphi$, er nede på størrelse med den karakteristiske termiske energi, κT, vil diffusionen blive væsentlig, og koncentrationsforskelle dermed blive mindre markante. Potentialer af størrelse $\varphi = \kappa T/e$ og mindre dæmpes derfor ikke så effektivt som større potentialer, men vil få en vis udbredelse i plasmaet.

Hvis potentialet ved kuglens overflade, φ_o, er større end $\kappa T/e$, dannes der altså stadig et ultratyndt lag med stor koncentrationsforskel. Dette lag vil dog kun bringe potentialet ned til omkring $\kappa T/e$. Herefter vil potentialet dæmpes af en sky med mere moderat koncentrationsforskel og en vis udstrækning. Dæmpningen i denne zone betegnes Debye-afskærmning.

Det viser sig, at i denne zone dæmpes plasmapotentialet, φ_p, i forhold til vakuumpotentialet, φ_v, med en faktor $\exp\{-\gamma r/d\}$, hvor r er afstanden til kuglens centrum, og d er Debye-længden. Faktoren γ afhænger af, hvilken tidsskala der arbejdes med. For korte tidsskalaer, svarende til f.eks. at kuglen bevæger sig hurtigt, antager γ værdien 1, mens den for langsomme og stationære forhold antager værdien $\sqrt{2}$. Dette hænger sammen med, at koncentrationsforskydningen af ioner indstiller sig langsommere end forskydningen af elektroner p.g.a. ionernes meget større inerti.

For at give kvantitativ mening til Debye-længden betragter vi et uendeligt plasma, hvor planet $x = 0$ er holdt på et konstant potential, φ_o; se Fig. 2.3. Vi forestiller os, at eksperimentets tidsskala er så lang, at stationære forhold når at indstille sig for både ioner og elektroner.

Poisson's ligning $\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_o$, hvor rumladningstætheden $\rho = e(n_i - n_e)$, giver i én dimension

$$\frac{d^2\phi_p(x)}{dx^2} = \frac{-e(n_i - n_e)}{\varepsilon_o} , \qquad (2.3)$$

hvor e er elementarladningen, og n_i og n_e er ion- hhv. elektrontætheden, som begge er rumafhængige.

Det vides fra den statistiske mekanik, at fordelingsfunktionen i tilstedeværelsen af et potentialfelt, E_p, er givet ved

$$f(\mathbf{v}) = n\left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{\frac{1}{2}mv^2 + E_p}{\kappa T}\right\} , \qquad (2.4)$$

hvor n er den uforstyrrede tæthed på steder, hvor $E_p = 0$.

Ved integration over **v** (rektangulære koordinater) fås

$$n(E_p) = n \exp\left\{-\frac{E_p}{\kappa T}\right\} . \qquad (2.5)$$

Idet potentialfeltet for ioner henholdsvis elektroner er givet ved $E_p = \pm e\varphi_p$, fås for n_i og n_e

$$n_i(x) = n \exp\left\{-\frac{e\phi_p(x)}{\kappa T}\right\} . \qquad (2.6)$$

$$n_e(x) = n \exp\left\{\frac{e\phi_p(x)}{\kappa T}\right\} . \qquad (2.7)$$

Ved indsættelse af (2.6) og (2.7) i (2.3) fås

$$\frac{d^2\phi_p(x)}{dx^2} = \frac{en}{\varepsilon_o}\left(\exp\left\{\frac{e\phi_p(x)}{\kappa T}\right\} - \exp\left\{-\frac{e\phi_p(x)}{\kappa T}\right\}\right) . \qquad (2.8)$$

Det indses let, at vores billede af afskærmningen af felter med meget stærk afskærmning for $\varphi_p > \kappa T/e$ og moderat for $\varphi_p < \kappa T/e$ fuldt ud stemmer overens med feltbeskrivelsen givet ved (2.8).

I Debye-afskærmningszonen kan (2.8) lineariseres, idet $\varphi_p << \kappa T/e$. Vi finder

$$\frac{d^2\phi_p(x)}{dx^2} = \frac{en}{\varepsilon_o}\left(2\frac{e\phi_p(x)}{\kappa T}\right) . \qquad (2.9)$$

Idet $\varphi_p \to o$ for $x \to \infty$, er løsningen til (2.9)

$$\phi_p(x) = \phi_{Do} \exp\left\{-\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{\frac{\varepsilon_o \kappa T}{ne^2}}}\right\}$$

$$= \phi_{Do} \exp\left\{-\sqrt{2}\frac{x}{d}\right\} . \qquad (2.10)$$

Størrelsen

$$d \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_o \kappa T}{ne^2}} \qquad (2.11)$$

Debye-længden

er Debye-længden.

Ved bestemmelse af konstanten φ_{Do} skal der tages hensyn til nærafskærmningen. For $\varphi_o << \kappa T/e$ er $\varphi_{Do} \approx \varphi_o$.

Det fremgår af den foregående udledning, at et vilkårligt stort potential effektivt er afskærmet inden for ganske få Debye-længder. Det er altså ikke muligt at inducere afvigelser fra ladningsneutralitet over områder, hvis udstrækning er væsentlig større end Debye-længden. Det skal nu vises, at diffusion af f.eks. elektroner bort fra sådanne områder heller ikke kan give anledning til væsentlige afvigelser fra ladningsneutralitet i disse områder.

Kun små afvigelser fra ladningsneutralitet

Betragt et plasma, hvor tætheden i et kugleformet område med radius R er lig med n, mens tætheden udenfor er forsvindende. Da elektronernes termiske hastighed er meget større end ionernes, vil elektronerne søge at diffundere ud fra det kugleformede område meget hurtigere end ionerne. Vi ser på den situation, hvor alle elektronerne har forladt det kugleformede område, mens ionerne endnu ikke har nået at bevæge sig væsentligt. Rumladningstætheden i kugleområdet er da $\rho = ne$. Integration af Poisson's ligning ($\nabla^2\varphi = -\rho/\varepsilon_0$) over en kugle med radius r giver, idet Gauss' sætning anvendes på venstre siden

$$4\pi r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{4\pi}{3} r^3 \frac{ne}{\varepsilon_o} \; ; \; r \leq R \, . \tag{2.12}$$

Løsningen til (2.12) ses umiddelbart at være

$$\phi(r) = -\frac{ne}{6\varepsilon_o} r^2 + \text{konst.} \; ; \; r \leq R \tag{2.13}$$

Forskellen mellem det elektriske potential i centeret og på kuglens overflade er

$$\Delta\phi = \phi(R) - \phi(0) = -\frac{ne}{6\varepsilon_o} R^2 \, . \tag{2.14}$$

For elektronerne repræsenterer kuglen altså en potentialbrønd, hvis dybde, E_p, er givet ved

$$E_p = \frac{ne^2}{6\varepsilon_o} R^2 \, . \tag{2.15}$$

Som allerede diskuteret, kan en væsentlig diffusion fra en sådan brønd kun forekomme, hvis den karakteristiske termiske energi, κT, er større end E_p. Vi konkluderer heraf, at det største kugleformede område, hvor diffusion kan give anledning til væsentlig afvigelse fra ladningsneutralitet, er bestemt ved

$$E_p = \kappa T \,, \tag{2.16}$$

hvoraf fås

$$R = \sqrt{6}\sqrt{\frac{\varepsilon_o \kappa T}{ne^2}} = \sqrt{6}d \,. \tag{2.17}$$

Det følger altså ud fra disse energimæssige betragtninger, at væsentlige afvigelser fra ladningsneutralitet hverken kan induceres eller spontant forekomme over områder, hvis udstrækning er større end Debye-længden.

2.3.3. Korteste afstand ved centralt stød

Når ladede partikler bevæger sig i et plasma, sker det, at de kommer hinanden så nær, at de vekselvirker gennem Coulombkræfter, hvorved deres baner afbøjes. Sådanne processer kaldes stød, ofte bruges glosen Coulombstød. I de fleste tilfælde, når partiklerne før stødet ikke bevæger sig direkte mod hinanden, kommer de ikke særligt tæt sammen, derved bliver vekselvirkningerne og dermed afbøjningerne små. Den størst mulige afbøjning af banerne, 180°, fås, når to ens ladede partikler før stødet bevæger sig direkte mod hinanden; sådanne stød kaldes centrale stød. Vi skal nu beregne den korteste afstand, der opnås, mellem to ens ladede partikler i et centralt stød. Vi vil betragte to partikler, der begge før stødet har den for plasmaet karakteristiske energi κT, og som begge har elementarladningen e.

Den potentielle energi, E_p, af et system af to ladede partikler, hver med ladningen e og den indbyrdes afstand x, er givet ved

$$E_p = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_o x} \,. \tag{2.18}$$

Den mindste indbyrdes afstand, b, som de to partikler opnår i deres stød, svarer til det punkt, hvor partiklernes kinetiske energi fuldstændig er konverteret til potentiel energi.

$$E_o(x = b) = 2\kappa T \,. \tag{2.19}$$

Heraf fås umiddelbart for den korteste afstand ved centralt stød

$$b = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_o \kappa T} = \frac{d}{8\pi n d^3} \,. \tag{2.20}$$

Korteste afstand

b som givet i (2.20) repræsenterer kun en karakteristisk nærmeste afstand, fordi den er beregnet for den karakteristiske energi κT. I et plasma vil der være partikler med meget højere energier, og de vil naturligvis komme meget tættere sammen i stød.

Debye-terning

Størrelsen nd^3 er antallet af partikler i en terning med Debye-længden som kantlængde. På Fig. 2.2 er indtegnet linier med konstante nd^3 -værdier. Det fremgår af figuren, at nd^3 er en meget stor størrelse for de fleste plasmaer. Sidste ligning i (2.20) viser derfor, at b normalt er meget mindre end Debye-længden.

2.3.4. Fri middelvejlængde mellem Coulombstød

Coulomb-afbøjninger

Den vejlængde, som en plasmapartikel i gennemsnit bevæger sig mellem to Coulombstød, er en meget væsentlig karakteristisk parameter. Den kaldes den fri middelvejlængde, l_{fri}. For at beregne den må vi først vedtage, hvor kraftig en afbøjning skal være, for at vi vil kalde den et stød. Vi vælger kun at interessere os for de stød, hvor banebøjningen er 90° eller mere. Figur 2.4 viser banerne for to ens partikler, som under et stød afbøjes en vinkel θ.

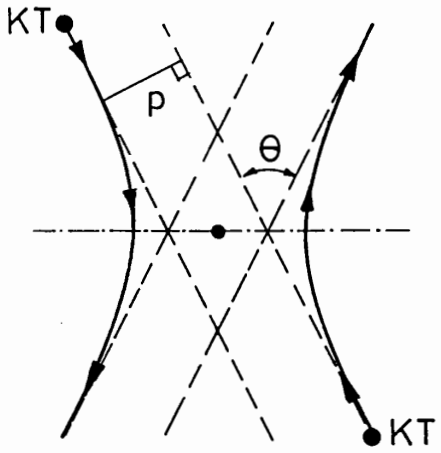

Fig. 2.4. Baner for to ens, stødende partikler. p er stødparameteren, θ er afbøjningsvinkelen.

Figuren definerer også stødparameteren p, som den nærmeste afstand, der ville have været opnået mellem de to partikler, hvis de ikke havde vekselvirket. Har partiklerne begge den translatoriske energi, κT, kan det vises [2], [5] og [7], at sammenhængen mellem afbøjningsvinkel og stødparameter er givet ved

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{16\pi\varepsilon_o\kappa T}{e^2}p\,. \qquad (2.21)$$

Afbøjningsvinkler på 90° eller mere opnås altså for stødparameterværdier

$$p \leq p_o = \frac{e^2}{16\pi\varepsilon_o \kappa T} = \frac{b}{2} . \qquad (2.22)$$

Heraf følger, at tværsnittet for stødprocesser, der fører til afbøjninger på 90° eller derover, er

$$\sigma_o = \pi p_o^2 = \frac{\pi}{4} b^2 . \qquad (2.23)$$

Den fri middelvejlængde mellem sådanne stød er da (se Appendiks 2)

$$l_{\text{fri}} = \frac{1}{n\sigma_o} . \qquad (2.24)$$

Ved brug af (2.22), (2.23) og (2.11) kan (2.24) skrives

$$l_{\text{fri}} = 256\pi(nd^3)d . \qquad (2.25)$$

Fri middelvejlængde

Idet nd^3 som tidligere nævnt er en meget stor størrelse for de fleste plasmaer, fremgår det af (2.25), at den fri middelvejlængde mellem Coulombstød er meget stor sammenlignet med Debye-længden.

Den ovenfor gennemførte beregning af l_{fri} er meget simplificeret, den tjener blot til at vise, at $l_{\text{fri}} >> d$. I en mere tilbundsgående beregning af den fri middelvejlængde må der også tages hensyn til de mange strejfende stød, som hver for sig giver anledning til afbøjninger, der er mindre end 90°, men som tilsammen efterhånden vil føre til store afbøjninger. Ved en beregning af virkningen af de mange strejfende stød må der desuden tages hensyn til, at den afskærmning, der er diskuteret i afsnit 2.3.2, bevirker, at to plasmapartikler ikke kan vekselvirke, når de er længere end Debye-længden fra hinanden. De strejfende stød har altså stødparametre i intervallet fra b til d. Det kan vises, [2], [5] at virkningen af disse mange strejfende stød er, at udtrykket (2.24) skal korrigeres med Coulomblogaritmen $\ln \Lambda = \ln(d/b)$ og bliver

$$l_{\text{korr}} = \frac{1}{n\sigma_o \ln\Lambda} . \qquad (2.26)$$

Korrigeret fri middelvejlængde

For de fleste plasmaer ligger $\ln\Lambda$ mellem 10 og 20. Bemærk forøvrigt, at $d/b = 8\pi nd^3$. Selv med denne korrektion er den fri middelvejlængde meget større end Debye-længden.

2.3.5. Gyroradier

Når et plasma befinder sig i et magnetisk felt, vil de ladede partikler på grund af Lorenz-kraften bevæge sig i skrueformede baner langs feltlinierne. Partiklens gyroradius er

$$r_c = \frac{mv_\perp}{eB}\,, \tag{2.27}$$

Gyroradius

hvor m er partiklens masse, $v_\perp$ dens hastighed vinkelret på magnetfeltet, og e dens ladning. For en partikel, som har den karakteristiske energi κT i sin vinkelrette bevægelse, får vi den karakteristiske gyroradius

$$r_{c,\mathrm{kar}} = \frac{\sqrt{2m\kappa T}}{eB}\,. \tag{2.28}$$

Karakteristiske gyroradier

I et plasma er der to karakteristiske gyroradier, en for ionerne og en for elektronerne.

2.3.6. Sammenligning mellem karakteristiske længder

I de foregående underafsnit er der udledt formler for en række karakteristiske længder. Som et eksempel skal disse længders numeriske værdier nu beregnes for et fusionsplasma. Beregningerne er udført for et fusionsplasma med $n = 10^{20}\mathrm{m}^{-3}$, $\kappa T = 10$ keV og $B = 1$T. De karakteristiske længder er i tabellen ordnet efter størrelse. Middelvejlængderne l_{fusion} er beregnet ved hjælp af tværsnittene for D+T-processen i Fig. 1.2 for deuteriumenergier på henholdsvis 10 og 100 keV.

Som det fremgår af tabel 2.1, dækker de karakteristiske længder et meget stort interval, 24 størrelsesordener. En af de mest slående oplysninger i tabellen er måske, at en 100 keV deuteriumkerne i det valgte fusionsplasma i middel skal bevæge sig $2{\cdot}10^7$ m (= afstanden mellem jordens poler langs jordens overflade), før den undergår fusion. Det viser, hvor store kravene er til det magnetfelt, der indeslutter et fusionsplasma. Partiklerne skal kunne bevæge sig mange tusinde km rundt i magnetfeltet uden at ramme de omgivende vægge.

Tabellen giver svar på følgende spørgsmål, der ofte stilles: Hvorfor kan man ikke fremstille fusionsenergi blot ved at accelerere 2 stråler af henholdsvis deuterium og tritium til ca. 100 keV og rette dem mod hinanden. Hvor strålerne passerer gennem hinanden, vil der jo ske fusionsprocesser, hvis energiproduktion må kunne udnyttes. Svaret er, at det går ikke, fordi den

fri middelvejlængde for 90° afbøjning, l_{korr}, er ca. 200 gange mindre end den fri fusionsmiddelvejlængde l_{fusion}; derfor vil mindre end 1/2% af partiklerne nå at fusionere, før de er bøjet ud af strålerne og tabte. Da der ved en fusionsproces dannes ca. 10 MeV er det nødvendigt, at adskillige procent af de partikler, der er accelereret til ca. 100 keV, fusionerer, ellers giver processerne ikke energioverskud.

1	Korteste afstand i centralt stød	$b = 7{,}2 \cdot 10^{-14}$ m
2	Middelafstand	$a = 2{,}1 \cdot 10^{-7}$ m
3	Debye-længde	$d = 7{,}4 \cdot 10^{-5}$ m
4	Elektrongyroradius	$r_e = 3{,}4 \cdot 10^{-4}$ m
5	Iongyroradius	$r_i = 1{,}4 \cdot 10^{-2}$ m
6	Korrigeret fri middelvejlængde	$l_{korr.} = 1{,}2 \cdot 10^{5}$ m
7	Fri middelvejlængde	$l_{fri.} = 2{,}5 \cdot 10^{6}$ m
8	Fri fusionsmiddelvejlængde, 100 keV	$l_{fusion} = 2 \cdot 10^{7}$ m
9	Fri fusionsmiddelvejlængde, 10 keV	$l_{fusion} = 5 \cdot 10^{10}$ m

Tabel 2.1. Numeriske værdier for karakteristiske længder i et fusionsplasma med $n = 10^{20} m^{-3}$, $\kappa T = 10$ *keV og* $B = 1T$.

2.3.7. Plasmafrekvenserne

Ligesom man ud fra et plasmas grundparametre, n, κT og B, kan udlede en række karakteristiske længder, kan man også finde nogle karakteristiske tider og dermed frekvenser. Den mest grundlæggende frekvens er elektronplasmafrekvensen.

En simpel udledning af elektronplasmafrekvensen kan opnås ved at betragte et uendelig stort plasma i et koordinatsystem som vist på Fig. 2.5.

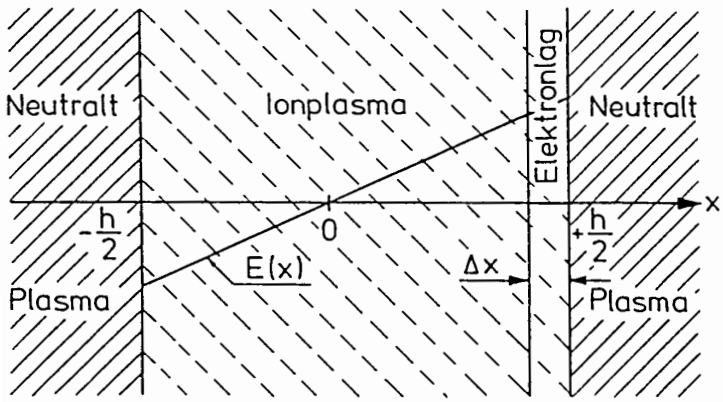

Fig. 2.5. Svingende elektronlag i ionplasma.

De elektroner, som i det uforstyrrede plasma ville befinde sig i et lag af tykkelse h mellem x = –h/2 og x = h/2, tænkes sammenpresset i et tyndt lag ($\Delta x << h$) op til x = h/2. Ionerne tænkes uforstyrrede med tætheden n. I området mellem x = –h/2 og x = h/2 opbygger ionernes ladningstæthed, ne, et elektrisk felt, der er symmetrisk omkring x = 0 og bestemt ved Maxwell-ligningen

$$\frac{dE}{dx} = \frac{ne}{\varepsilon_o} . \tag{2.29}$$

Den løsning til (2.29), der er symmetrisk omkring x = 0, er

$$E(x) = \frac{ne}{\varepsilon_o} x , \tag{2.30}$$

som også er vist på Fig. 2.5.

Det tynde elektronlag tænkes fra t = 0 at kunne bevæge sig som et stift legeme under påvirkning af det af ionerne dannede elektriske felt, uden at binære stød har indflydelse på bevægelsen. En arealenhed af elektronlaget har massen $nm_e h$ og ladningen – neh. Bevægelsesligningen for elektronlaget bliver da

$$nm_e h \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{n^2e^2h}{\varepsilon_o} x(t) , \tag{2.31}$$

som med betingelsen x(0) = h/2 har løsningen

$$x(t) = \frac{h}{2} \exp\left[i\sqrt{\frac{ne^2}{m_e\varepsilon_o}}\ t \right] . \tag{2.32}$$

Elektronerne vil altså svinge mellem yderpunkterne x = ± h/2 med elektronplasmafrekvensen (vinkelfrekvensen)

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e\varepsilon_o}} . \tag{2.33}$$

Elektronplasma-frekvensen

Elektronplasmafrekvensen er altså en karakteristisk frekvens, hvormed en forstyrrelse i elektrontætheden vil svinge. Bemærk, at frekvensen er uafhængig af lagtykkelsen h. Det vil senere blive vist, at elektronplasmafrekvensen har en meget mere generel betydning; f.eks. kan elektromagnetiske bølger kun transmitteres gennem et homogent plasma, hvis deres frekvens er større end ω_{pe}. Bemærk også, at det varer en elektronplasmaperiode ($= \omega_{pe}^{-1}$) for en

elektron med den karakteristiske energi, $\kappa T/2$, at tilbagelægge en Debyelængde.

Erstattes m_e med m_i i (2.33), fås ionplasmafrekvensen

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{ne^2}{m_i \varepsilon_o}} \,. \qquad (2.34)$$

Ionplasmafrekvensen

Ionplasmafrekvensen er også en væsentlig karakteristisk frekvens for et plasma, f.eks. kan et homogent plasma transmittere longitudinale tæthedsbølger (ionakustiske bølger) med frekvenser op til ω_{pi}.

2.3.8. Gyrofrekvenserne

Når et plasma befinder sig i et magnetfelt, bevæger de ladede partikler sig rundt om feltlinierne i deres gyrobevægelser. De tilsvarende gyrofrekvenser er også karakteristiske frekvenser for plasmaet. Elektrongyrofrekvensen er

$$\omega_{ce} = \frac{eB}{m_e} \,, \qquad (2.35)$$

Elektrongyrofrekvensen

og iongyrofrekvensen er

$$\omega_{ci} = \frac{eB}{m_i} \,. \qquad (2.36)$$

Iongyrofrekvensen

2.3.9. Kollisionsfrekvenser

Ud fra de frie middelvejlængder mellem stød og de karakteristiske termiske hastigheder kan man beregne karakteristiske kollisionsfrekvenser. Vælger man at benytte den korrigerede frie middelvejlængde for 90° stød (2.26), fås den karakteristiske kollisionsfrekvens $\nu_{korr} = v_{th}/l_{korr}$, som for elektronerne bliver

$$\upsilon_{korr,e} = \sqrt{\frac{2\kappa T}{m_e}} / l_{korr} \,, \qquad (2.37)$$

Elektronkollisionsfrekvens

og for ionerne

$$\upsilon_{korr,i} = \sqrt{\frac{2\kappa T}{m_i}} / l_{korr} \,. \qquad (2.38)$$

Ionkollisionsfrekvens

De korrigerede kollisionsfrekvenser i (2.37) og (2.38) gælder for henholdsvis elektroners stød mod elektroner og for ioners stød mod ioner. Imidlertid støder elektronerne og ionerne også mod hinanden, og sådanne stød vil også afbøje partiklernes baner. For et elektron-ionstød vil det generelt gælde, at ionerne kan betragtes som hvilende og tunge i forhold til elektronerne. Da der er impulsbevarelse under disse stød, er det kun den lette elektron, der får bøjet sin bane væsentligt. Ionen er ret upåvirket under stødet. Når en elektron støder mod en ion, er stødparameteren for 90°-afbøjning dobbelt så stor som angivet i (2.22) for elektron-elektronstødet. Grunden er netop, at den tunge ion ligger stille under stødet. Elektron-ionstødet har derfor en fire gange mindre fri middelvejlængde end elektron-elektronstødet, og vi får dermed en karakteristisk frekvens for elektron-ionstød, som er

$$\upsilon_{\text{korr,ei}} = 4\sqrt{\frac{2\kappa T}{m_e}}\,/l_{\text{korr}} \quad . \tag{2.39}$$

Elektron-ionkollisionsfrekvens

2.3.10. Sammenligning mellem karakteristiske frekvenser

Vi betragter igen fusionsplasmaet fra underafsnit 2.3.6 med $n = 10^{20}\ m^{-3}$, $\kappa T = 10$ keV og $B = 1T$ og finder følgende numeriske værdier for de karakteristiske frekvenser

Elektronplasmafrekvensen	$\omega_{pe} = 5{,}6\cdot10^{11}$ rad/s
Ionplasmafrekvensen	$\omega_{pi} = 1{,}3\cdot10^{10}$ rad/s
Elektrongyrofrekvens	$\omega_{ce} = 1{,}8\cdot10^{11}$ rad/s
Iongyrofrekvens	$\omega_{ci} = 9{,}6\cdot10^{7}$ rad/s
Elektronkollisionsfrekvens	$\nu_{\text{korr,e}} = 5{,}3\cdot10^{2}\ s^{-1}$
Ionkollisionsfrekvens	$\nu_{\text{korr,i}} = 12\ s^{-1}$
Elektron-ionkollisionsfrekvens	$\nu_{\text{korr,ei}} = 2{,}1\cdot10^{3}\ s^{-1}$.

Som det fremgår, dækker disse frekvenser også et meget stort område (ca. 10 størrelsesordener). De tre kollisionsfrekvenser er ca. 6 størrelsesordener lavere end gyro- og plasmafrekvenserne, som alle ligger over ca. 100 Mrad/s.

2.3.11. Uddybet definition af plasmabegrebet

I kapitel I er et plasma defineret som en gas af ladede partikler. Ved hjælp af de karakteristiske parametre, der er behandlet først i dette kapitel, kan definitionen af begrebet plasma nu uddybes.

Det blev vist i underafsnit 2.3.2, at et plasma af energimæssige grunde må være elektrisk neutralt over områder, der er større end Debye-længden. Har man på den anden side en samling af ladede partikler, hvis rumlige udstrækning er lille sammenlignet med Debye-længden, har partiklerne mulighed for at bevæge sig væk fra hinanden - det er altså en samling af frie partikler. En sådan samling vil man ikke kalde et plasma. En gas af ladede partikler vil kun bliver kaldt et plasma, hvis den er så stor, at dens lineære udstrækning er stor sammenlignet med Debye-længden. Denne definition indebærer, at et plasma udadtil er (næsten) elektrisk neutralt, eller at det består af (næsten) lige mange elektroner og positive enhedsladninger.

Hvis f.eks. elektronerne forsøger at forlade et plasma, vil de tilbageblevne ioner samlet opsætte et elektrisk felt, som vil trække elektronerne tilbage. Et sådant felt, der skyldes mange partiklers samlede virkning, kaldes et kollektivt felt, og vekselvirkningen mellem partikler gennem et sådant felt kaldes kollektiv vekselvirkning. Svingninger af den type, der er diskuteret i underafsnit 2.3.7, skyldes helt klart kollektiv vekselvirkning. En af de væsentligste forskelle mellem et plasma og en normal gas er, at vekselvirkningen mellem plasmapartiklerne hovedsagelig sker gennem kollektive felter, medens, som vist i underafsnit 2.3.4, binære stød er af lille betydning. I en normal gas vekselvirker partiklerne kun gennem stød.

3. LADEDE PARTIKLERS BEVÆGELSE I ELEKTRISKE OG MAGNETISKE FELTER

I kapitel 2 blev det vist, at binære stød mellem ladede partikler i et plasma er sjældne begivenheder, når plasmaperioden eller gyroperioden bruges som tidsenhed. For fusionsplasmaet behandlet i underafsnit 2.3.5 vil de ladede partikler endog bevæge sig meget længere end plasmaets dimensioner mellem stød. De ladede partikler i et plasma vil derfor i det store og hele kun påvirkes af de elektriske og magnetiske felter, som er til stede i plasmaet. Sådanne felter kan dels være ydre påtrykte felter og dels inducerede felter, der er genereret kollektivt af selve plasmaets partikler, som via rumladningstætheder genererer elektriske felter og via strømme genererer magnetiske felter.

I dette kapitel ser vi på ladede partiklers bevægelse i forskellige feltkonfigurationer, som har interesse i fusionsforskningen.

3.1. Bevægelsesligningen

Vi betragter en partikel med massen m og ladningen q, der bevæger sig med hastigheden $\mathbf{v}(t)$ i et område med et elektrisk felt $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ og et magnetisk felt $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Partiklens bevægelsesligning er

$$m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = q\mathbf{E}(\mathbf{r},t) + q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r},t) \,. \qquad (3.1)$$

Generel bevægelsesligning

Ved løsning af (3.1) skal man benytte **E**- og **B**-feltets værdier i partiklens aktuelle position $\mathbf{r}(t) = \int \mathbf{v}(t)dt + \text{const.}$

I det almindelige tilfælde, hvor $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ og $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ er inhomogene og tidsvarierende felter, er det yderst kompliceret at finde løsninger til (3.1). Ofte kan løsningen kun opnås ved numeriske beregninger.

I næste afsnit behandles en række specialtilfælde, hvor analytiske løsninger til bevægelsesligningen kan opnås. Her skal blot nævnes nogle mere generelle egenskaber ved løsningen til (3.1) for tilfælde, hvor **E**- og **B**-felterne har specielle egenskaber.

3.1.1. Inhomogent men tidsuafhængigt magnetfelt, $\mathbf{E} = 0$

Vi ser på en situation uden elektrisk felt og med et inhomogent, men tidsuafhængigt magnetfelt. Af bevægelsesligningen

$$m\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = q\mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) \tag{3.2}$$

Tidsuafhængigt magnetfelt udfører intet arbejde

fremgår, at den magnetiske kraft står vinkelret på partiklens hastighed, derfor udfører den intet arbejde, og partiklens kinetiske energi, $mv^2/2$, forbliver konstant. Der gælder derfor følgende regel: en ladet partikel, der bevæger sig i et tidsuafhængigt magnetfelt uden påvirkning af andre kræfter, har konstant kinetisk energi.

Denne regel gælder ikke, hvis magnetfeltet varierer i tid, fordi et tidsvarierende magnetfelt genererer et elektrisk felt, som er bestemt ved Maxwell-ligningen $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$. Dette **E**-felt har generelt en komponent i partiklens bevægelsesretning, og det vil derfor forandre dens kinetiske energi.

Reglen om en ladet partikels konstante kinetiske energi i et tidsuafhængigt magnetfelt er kun med tilnærmelse korrekt. Det er kendt, at ladede partikler, der accelereres, udsender elektromagnetisk stråling. Da de ladede partikler i et magnetfelt accelereres af Lorentz-kraften, udsender de strålingsenergi, som kaldes cyclotronstråling eller synkrotronstråling. I praksis er cyclotrontabene fra et fusionsplasma relativt små, og de vil ikke blive behandlet her. Interesserede henvises til [3], [5], [6] og [7], hvor detaljerede behandlinger findes.

3.1.2. Inhomogene men tidsuafhængige felter

Vi betragter nu en ladet partikel, der bevæger sig i et område, hvor både det elektriske og det magnetiske felt er tidsuafhængige, men gerne inhomogene. Et tidsuafhængigt elektrisk felt kan som bekendt udtrykkes ved et potentiale $\varphi(\mathbf{r})$ gennem ligningen $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. Da det konstante magnetiske felt igen ikke kan udføre arbejde på partiklen, er dens totale energi,

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi(\mathbf{r}) + konst\,, \tag{3.3}$$

Off limits områder

invariant under bevægelsen. Heraf ses, at områder, hvor $q\varphi(r) > E_{tot} - konst$, er off limits for partiklen; den kan af energimæssige grunde ikke trænge ind i sådanne områder.

3.2. Bevægelsesbaner i Simple Feltkonfigurationer

I dette afsnit findes og diskuteres løsningerne til bevægelsesligningen (3.1) for nogle situationer med særligt simple feltkonfigurationer.

3.2.1. E = konstant i tid og rum, B = 0

For denne situation tager bevægelsesligningen (3.1) formen

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E}\,, \tag{3.4}$$

Parabelbaner

der viser, at partiklen accelereres i **E**-feltets retning, medens dens hastighedskomponent vinkelret på **E**-feltet er konstant. Partiklen vil altså følge en parabelformet bane ligesom en partikel i et frit fald i et tyngdefelt.

3.2.2. B = konstant i tid og rum, E = 0

Bevægelsesligningen er nu

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v}\times\mathbf{B}\,. \tag{3.5}$$

v opspaltes i komponenter vinkelret på og parallel med **B**-feltet

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp + \mathbf{v}_\parallel\,, \tag{3.6}$$

hvorved (3.5) deles op i

$$m\frac{d\mathbf{v}_\parallel}{dt} = 0 \tag{3.7}$$

og

$$m\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = q\mathbf{v}_\perp\times\mathbf{B}\,. \tag{3.8}$$

Løsningen til (3.7) ses direkte at være $\bar{v}_{\parallel}$ = konstant. Af (3.8) ses, at accelerationen står vinkelret på **v**, dvs. $|v_{\perp}|$ = konstant, og partikelbanen er en cirkelbane, hvis radius r_c bestemmes af

$$m\frac{v_{\perp}^2}{r_c} = qv_{\perp}B\,, \tag{3.9}$$

altså

$$r_c = \frac{mv_{\perp}}{qB}\,. \tag{3.10}$$

Gyroradius
Cyklotronradius
Larmorradius

r_c kaldes i flæng **gyroradius, cyklotronradius** eller **Larmorradius.**

Vinkelfrekvensen, ω_c, der tilsvarende kaldes **gyrofrekvensen, cyklotronfrekvensen** eller **Larmorfrekvensen,** bestemmes ved $\omega_c r_c = v_{\perp}$, altså

$$\omega_c = \frac{qB}{m}\,. \tag{3.11}$$

Gyrofrekvens
Cyklotronfrekvens
Larmorfrekvens

Den fulde løsning til (3.5) bliver da, at partiklen følger en skruelinie med stigningen $2\pi mv_{\parallel}/qB$. Centret i den vinkelrette cirkelbevægelse følger skrueliniens akse, altså en bestemt magnetfeltlinie. Dette center kaldes ledecenter (**guiding center**). Set i retning modsat magnetfeltliniernes roterer en positivt ladet partikel med uret i sin gyrobevægelse og en negativ partikel mod uret.

Ledecenter

3.2.3. E og B begge konstante i tid og rum, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$

Vi indlægger et koordinatsystem, som vist på Fig. 3.1 med z-aksen i **B**-feltets retning og y-aksen i **E**-retningen. Bevægelsesligningen bliver for dette tilfælde

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,. \tag{3.12}$$

Da $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$ er der ingen kræfter, der påvirker partiklen i **B**-feltets retning, derfor er dens hastighedskomponent i **B**-retningen konstant, $\mathbf{v}_{\parallel}$ = konstant. Bevægelsen vinkelret på magnetfeltet ville uden **E**-feltet være en cirkel som vist punkteret på Fig. 3.1. Ud fra simple fysiske argumenter er det let at

forudse, hvorledes banen ændrer sig, når $\mathbf{E} = E\,\hat{\mathbf{y}}$ introduceres. Når partiklen i sin bane er på vej opad, accelereres den af **E**-feltet, hvorved dens gyroradius ifølge (3.10) forøges - banen bliver mindre krum. Når partiklen har nået banens øverste punkt, vender den og bevæger sig mod **E**-feltet; den decelereres, dens hastighed og dermed gyroradius aftager, og banen bliver mere og mere krum. Når partiklen har nået banens nederste punkt, vender den og bevæger sig igen i **E**-feltets retning. Resultatet må blive en bane som antydet på Fig. 3.1, altså en bane, hvori partiklen driver i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen vinkelret på både **B**- og **E**-felterne.

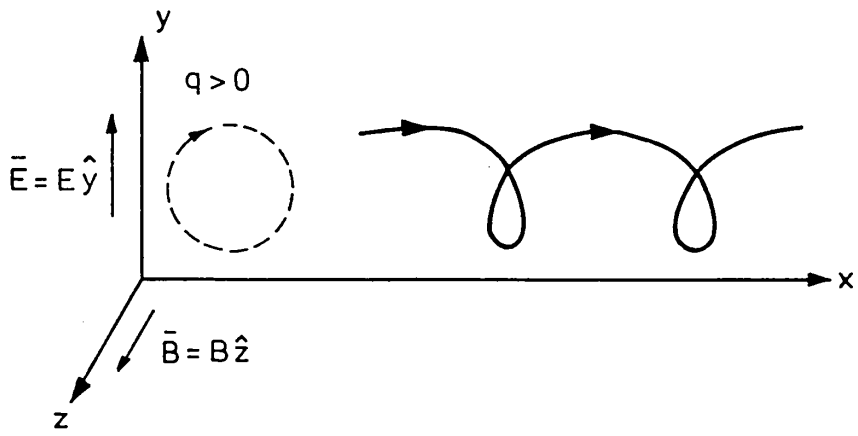

Fig. 3.1. Positivt ladet partikels bevægelse i $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$*-konfiguration.*

For at beregne partikelbanen ved hjælp af (3.12) sættes

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_\perp^* + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \,. \tag{3.13}$$

Hermed bliver bevægelsesligningen

$$m\frac{d\mathbf{v}_\perp^*}{dt} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}_\perp^* \times \mathbf{B} + q\frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \times \mathbf{B} = q\mathbf{v}_\perp^* \times \mathbf{B} \,. \tag{3.14}$$

(3.14) er helt analog til (3.8). $\mathbf{v}^*$ beskriver derfor en cirkelbane, som beskrevet i 3.2.2. Partiklens samlede bevægelse, som er beskrevet ved (3.13), bliver altså en superposition af cirkelbevægelsen $\mathbf{v}^*$ og en driftbevægelse, der står vinkelret på både **B** og **E**, og som er givet ved

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \,. \tag{3.15}$$

E×B-*drift*

Sådanne bevægelsesbaner kaldes cycloider. Bemærk, at drifthastigheden er uafhængig af partiklens ladning, energi og masse. Elektroner og ioner følges ad. Denne driftbevægelse kaldes ofte $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$-drift.

3.2.4. Ydre kraft, K, vinkelret på homogent magnetfelt, E = 0

I visse tilfælde kan et plasma i et magnetfelt være påvirket af en ydre kraft, som står vinkelret på feltlinierne, det kan f.eks. være en tyngdekraft eller en centrifugalkraft. Bevægelsesligningen bliver i sådanne tilfælde

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{K} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \,, \tag{3.16}$$

som er identisk med (3.12), hvis $\mathbf{K}$ erstattes med $q\mathbf{E}$. I denne konfiguration får partiklerne derfor en baneform som i $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$-konfigurationen, men drifthastigheden bliver

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{K} \times \mathbf{B}}{qB^2} \,. \tag{3.17}$$

$\mathbf{K} \times \mathbf{B}$-*drift*

Bemærk, at drifthastigheden her er ladningsafhængig og derfor modsat rettet for elektroner og for ioner. Der opstår derfor en strøm i plasmaet, som løber vinkelret på både kraften og på feltlinierne. Denne driftbevægelse kaldes ofte $\mathbf{K} \times \mathbf{B}$-drift.

3.2.5. Inhomogent magnetfelt med transversal gradient ($\nabla B \perp \mathbf{B}$), E = 0

På Fig. 3.2 er koordinatsystemet lagt således, at magnetfeltlinierne peger i $\hat{\mathbf{z}}$-retningen, og magnetfeltstyrken vokser i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen, medens den er konstant i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen.

Vi antager, at magnetfeltet varierer svagt, således at det er næsten konstant over en ladet partikels gyrobane ($r_c|\nabla B|/B << 1$). Da de ladede partikler ikke påvirkes af kræfter i magnetfeltets retning, bevæger de sig med konstant hastighed langs feltlinierne, og vi nøjes igen med at betragte banernes projektion på xy-planen. Hvis feltet havde været konstant, ville en positiv partikel have bevæget sig i en cirkelbane som skitseret med punkteret linie på Fig. 3.2. Da feltet imidlertid vokser i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen, vil en partikel, der starter i punktet A og bevæger sig opad, løbe ind i et svagere felt, hvorved dens gyroradius vokser. Når den har passeret sin banes øverste punkt, vender den

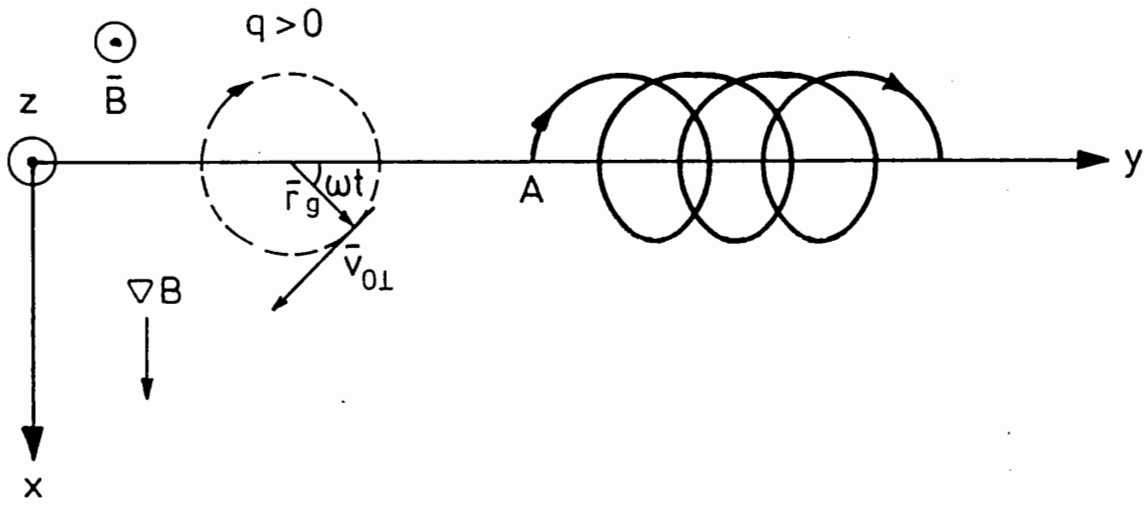

Fig. 3.2. Positivt ladet partikels bevægelse i inhomogent magnetfelt med transversal gradient.

og løber ind i et voksende felt, hvorved dens gyroradius bliver mindre og mindre. Efter at have passeret banens nederste punkt løber den igen ind i det svage felt og får større gyroradius. Banen må derfor få den form, som er vist fuldt optrukket på figuren. Resultatet er, at partiklen driver i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen, vinkelret på både **B** og ∇B.

For at beregne drifthastigheden skrives feltet på formen

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_o(1 + x/L) = B_o(1 + x/L)\hat{\mathbf{z}} \,, \tag{3.18}$$

hvor antagelsen om, at feltet varierer svagt, er ensbetydende med, at skalalængden $L >> r_c$. Bevægelsesligningen (3.1) tager nu formen

$$m\frac{d\mathbf{v}_\perp}{dt} = q\mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_o(1 + x/L) \,, \tag{3.19}$$

hvor x er partiklens aktuelle x-koordinat. Da x/L er en lille størrelse, kan dette led betragtes som en perturbation, og ligning (3.19) løses nu ved en perturbationsmetode. Vi sætter

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_{o\perp} + \mathbf{v}_{1\perp} \,, \tag{3.20}$$

hvor vi kræver, at $\mathbf{v}_{o\perp}$ skal være løsning til (3.19) uden det lille perturbationsled, altså til

$$m\frac{d\mathbf{v}_{o\perp}}{dt} = q\mathbf{v}_{o\perp} \times \mathbf{B}_o \,. \tag{3.21}$$

$\mathbf{v}_{o\perp}$ repræsenterer derfor cirkelbevægelsen i et homogent magnetfelt som behandlet i afsnit 3.2.2 og som vist punkteret på Fig. 3.2. $\mathbf{v}_{1\perp}$ repræsenterer den lille afvigelse fra den rene cirkelbevægelse, som skyldes perturbationsleddet x/L. Kombination af (3.19), (3.20) og (3.21) giver efter bortkastelse af led af anden orden

$$m\frac{d\mathbf{v}_{1\perp}}{dt} = q\mathbf{v}_{1\perp} \times \mathbf{B}_o + q\mathbf{v}_{o\perp} \times \mathbf{B}_o \frac{x_o}{L} , \tag{3.22}$$

hvor x_0 er partiklens x-position i den rene cirkelbevægelse givet ved (3.21). Indføres vinklen ωt som vist på Fig. 3.2, fås

$$x_o = r_c \sin \omega t \tag{3.23}$$

og

$$\mathbf{v}_{o\perp} = v_{o\perp} \cos \omega t \hat{\mathbf{x}} - v_{o\perp} \sin \omega t \hat{\mathbf{y}} . \tag{3.24}$$

Hastighedsperturbationen $\mathbf{v}_{1\perp}$ kan nu findes vha. (3.22). Vi er ikke her interesserede i at kende $\mathbf{v}_{1\perp}(t)$ som funktion af tiden i detaljer, men kun dens middelværdi over en gyroperiode. Midles (3.22) over en periode fås

$$m\langle\frac{d\mathbf{v}_{1\perp}}{dt}\rangle = q\langle\mathbf{v}_{1\perp} \times \mathbf{B}_o\rangle + q\langle\mathbf{v}_{o\perp} \times \mathbf{B}_o \frac{x_o}{L}\rangle . \tag{3.25}$$

Venstre side i (3.25) er lig 0, fordi det tidsligt konstante magnetfelt ikke kan tilføre partiklen energi. Heraf følger

$$\langle\mathbf{v}_{1\perp}\rangle = -\langle\mathbf{v}_{o\perp} \frac{x_o}{L}\rangle , \tag{3.26}$$

der med (3.23) og (3.24) fører til

$$\langle\mathbf{v}_{1\perp}\rangle = v_{o\perp} \frac{r_c}{2L} \hat{\mathbf{y}} , \tag{3.27}$$

der kan skrives på den generelle form

$$\langle \mathbf{v}_{1\perp} \rangle = \mathbf{v}_{drift} = \frac{w_\perp \mathbf{B} \times (\nabla B)}{qB^3} , \qquad (3.28)$$

∇B-drift

hvor $w_\perp \equiv mv_o^2/2$. Denne driftbevægelse kaldes ofte ∇B-drift.

Bemærk, at drifthastigheden for en ladet partikel i det inhomogene felt vokser proportionalt med partiklens kinetiske energi i bevægelsen vinkelret på feltlinierne, og at driftretningen er modsat for elektroner og ioner.

3.2.6. Ladede partiklers bevægelse i toroidale felter

I et simpelt toroidalt magnetfelt har feltlinierne form som lukkede cirkelformede ringe. Et toroidalt magnetfelt kan f.eks. genereres ved hjælp af magnetfeltspoler lagt omkring en torus som vist på Fig. 3.3a. Bemærk, at nøjagtig den samme feltkonfiguration inde i torus vil blive genereret af en lodret leder i symmetriaksen, som fører en strøm I_t, der er lig summen af strømmene i de enkelte spoler. Figur 3.3b viser et snit gennem en toroidal konfiguration. R_o kaldes storradius, og R er en variabel afstand fra den lodrette centerlinie. Lilleradius, a, repræsenterer radius i det torusformede kammers tværsnit, og r er en variabel afstand fra dette tværsnits centrum. φ og θ er to variable vinkler i det toroidale koordinatsystem. I et sådant system er magnetfeltstyrken givet ved

$$\mathbf{B}(R) = -\frac{\mu_o I_t}{2\pi R}\,\hat{\phi} = -B(R_o)\frac{R_o}{R}\,\hat{\phi} , \qquad (3.29)$$

hvis strømmen i spolerne løber som vist på Fig. 3.3b.

Ladede partikler, der bevæger sig rundt langs magnetfeltlinierne i denne feltkonfiguration, udfører to driftbevægelser: a) en **K**×**B**-drift og b) en ∇B-drift.

a) **K**×**B**-driften skyldes, at partikler, der bevæger sig langs de cirkelformede magnetfeltlinier med hastighed $v_\parallel$, vil føle sig påvirket af en udadrettet centrifugalkraft

$$\mathbf{K}_c = m\frac{v_\parallel^2}{R}\,\hat{\mathbf{R}} . \qquad (3.30)$$

Indsættes denne kraft i (3.17) fås

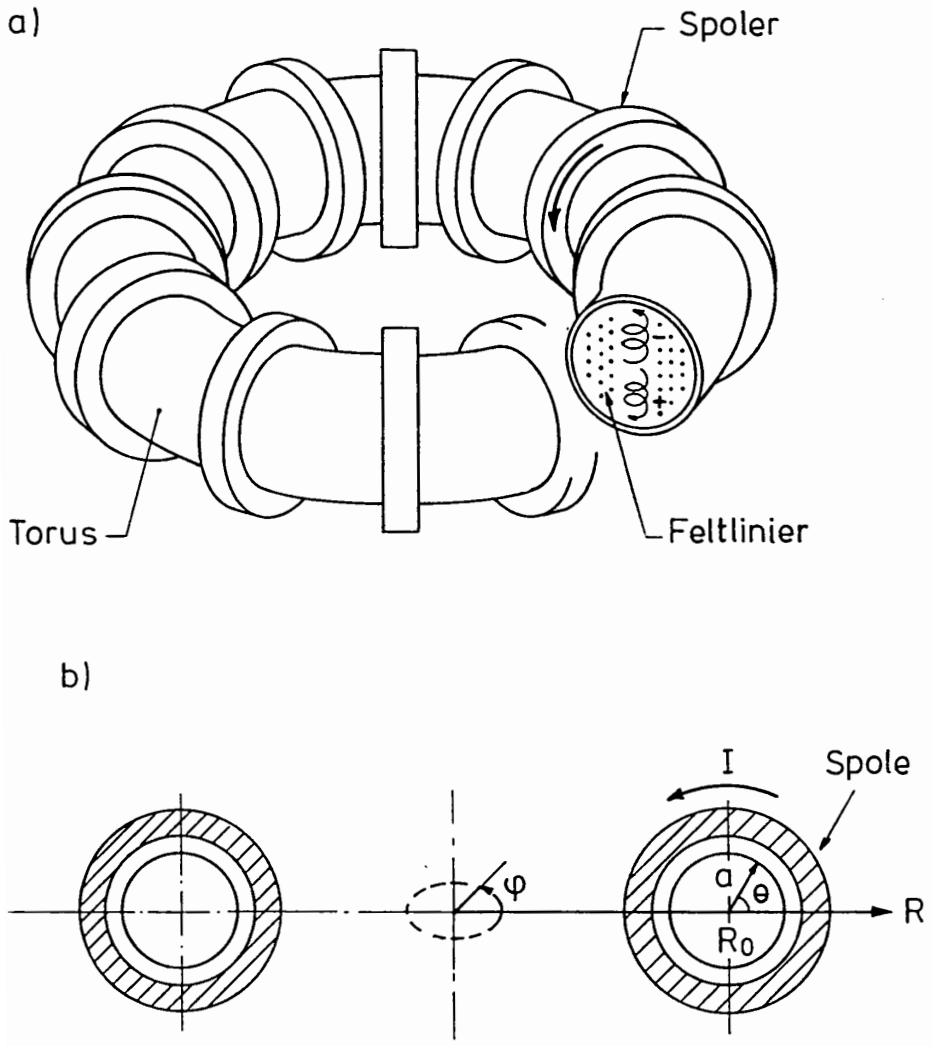

Fig. 3.3. Toroidalt system.

$$\mathbf{v}_d = -\frac{mv_\parallel^2}{qRB}\,(\hat{\mathbf{R}} \times \hat{\phi})\,. \tag{3.31}$$

Positive partikler driver altså nedad, negative opad, når det toroidale felt er lagt i $-\hat{\varphi}$-retningen.

b) ∇B-driften skyldes, at feltet har en gradient i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen, og den findes ifølge (3.29) til

$$\nabla B(R) = -\frac{B(R)}{R}\,\hat{\mathbf{R}}\,, \tag{3.32}$$

der efter indsættelse i (3.28) giver

$$\mathbf{v}_{drift} = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{qRB}(\hat{\phi} \times \hat{\mathbf{R}})\,. \tag{3.33}$$

Igen driver positive partikler nedad og negative opad.

Da der i et termisk plasma er dobbelt så megen energi i partiklernes bevægelse vinkelret på magnetfeltet (2 frihedsgrader) som i deres bevægelse parallelt med feltlinierne (én frihedsgrad), vil $\mathbf{K}\times\mathbf{B}$-driften (3.31) og ∇B-driften (3.33) være lige store i middel over alle plasmaets partikler.

De to ovenfor diskuterede driftbevægelser får ionerne i et plasma, der er indesluttet i det toroidale magnetfelt, til at bevæge sig nedad, og elektronerne opad. Der opstår derfor en ladningsadskillelse med en positiv rumladningstæthed forneden i plasmaet og en negativ foroven. Disse rumladninger genererer et opadrettet elektrisk felt i plasmaet, som derefter giver anledning til en $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-drift, som for alle partikler er udadrettet ($\hat{\mathbf{R}}$-retningen), og som derfor fører hele plasmaet ud mod beholdervæggen. Et plasma kan derfor ikke holdes effektivt indesluttet i denne simple toroidale magnetfeltkonfiguration. Senere i kapitel 5 diskuteres den såkaldte tokomakkonfiguration, som er en modificeret toroidal konfiguration, hvor man undgår den udadrettede $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-drift.

3.3. Adiabatiske Invarianter

Det er kendt fra den klassiske mekanik, at man ofte kan opskrive størrelser, som holder sig konstante under et legemes bevægelse, de såkaldte bevægelseskonstaner. Den totale energi, der er summen af kinetisk og potentiel energi, af en partikel, der bevæger sig i et konservativt kraftfelt, er et eksempel på en bevægelseskonstant. Bevægelsesmængdemomentet af en partikel i et centralt kraftfelt er en anden velkendt bevægelseskonstant. For ladede partikler i et tidsuafhængigt magnetfelt er det allerede nævnt, at den kinetiske energi er en bevægelseskonstant.

For ladede partikler, der bevæger sig i magnetfeltet, kan man definere størrelser, som holder sig konstant, selv når magnetfeltet ændrer sig, blot ændringshastigheden er tilstrækkelig lille. Sådanne størrelser kaldes **adiabatiske invarianter**. Her omtales 3 sådanne invarianter, nemlig det **magnetiske moment**, den **longitudinale invariant** og **fluxinvarianten**.

3.3.1. Det magnetiske moment. Spejlmaskiner

Vi betragter en ladet partikel, der befinder sig i et magnetfelt, som ændrer sig enten i tid eller i rum. Lad ændringen i det magnetiske felt, som partiklen føler, være så langsom, at

$$\frac{dB}{dt}\frac{1}{B} \langle\langle \omega_c \, . \qquad (3.34)$$

For en lukket strømsløjfe defineres det magnetiske moment, μ, som produktet af sløjfens areal, A, og den strøm, I, der løber i sløjfen, altså

$$\mu \equiv IA \, . \qquad (3.35)$$

Magnetisk moment

Gyrocirkelbanen for en ladet partikel i et magnetfelt repræsenterer en lukket strømsløjfe med $A = \pi r_c^2$ og med $I = q\,\omega_c/2\pi$. En sådan partikels magnetiske moment kan derfor ved brug af (3.10) og (3.11) udtrykkes som

$$\mu = \pi r_c^2 q \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B} \, . \qquad (3.36)$$

Det magnetiske moment er altså lig med partiklens kinetiske energi i dens vinkelrettede bevægelse divideret med feltstyrken.

Et magnetisk moment opfattes ofte som en vektor, dens retning bestemmes af den normal til strømsløjfens areal, der er parallel til det af strømmen genererede magnetfelt gennem dette areal. For ladede partikler i et magnetfelt er det magnetiske moment modsat rettet det ydre **B**-felt og kan altså udtrykkes som

$$\mu = -\frac{\frac{1}{2}mv_\perp^2}{B^2}\mathbf{B} \equiv \frac{-w_\perp}{B^2}\mathbf{B} \, , \qquad (3.37)$$

hvor $w_\perp$ er den kinetiske energi i partiklens vinkelrette bevægelse.

Plasma er diamagnetisk

Det fremgår af (3.37), at et plasma svækker det magnetfelt, hvori det befinder sig, - det er et diamagnetisk medium. Senere i kapitel 5 vil et plasmas diamagnetiske egenskaber blive diskuteret nærmere. Her skal blot nævnes, at magnetiseringen, der defineres som det samlede magnetiske moment pr. rumenhed, i et plasma med tæthederne n_i og n_e og temperaturerne T_i og T_e af (3.37) findes til

$$\mathbf{M} = -\frac{n_e \kappa T_e + n_i \kappa T_i}{B^2}\mathbf{B} \, . \qquad (3.38)$$

(Husk at der er 2 frihedsgrader i den vinkelrette bevægelse, og at middelenergien pr. partikel i hver frihedsgrad er = $\kappa T/2$).

μ er invariant

Det skal nu vises, at μ er en invariant under en ladet partikels bevægelse i et felt, der opfylder (3.34). Lad os betragte et homogent felt **B**(t), og lad os antage, at det kun er feltets styrke, der varierer, altså at $\partial\mathbf{B}/\partial t$ er parallel med

B. Da feltet er tidsvarierende, inducerer det et **E**-felt, der bestemmes ved Maxwell-ligningen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} . \tag{3.39}$$

Når partiklen roterer i sin gyrobane, påvirkes den af **E**-feltet, der enten accelererer eller decelererer den. Den ændring i sin vinkelrette kinetiske energi, som partiklen får under en baneomgang, kaldes $\Delta w_\perp$, og den beregnes ved at integrere **E**-feltets arbejde langs banen (se Fig. 3.4a)

$$\Delta w_\perp = q \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} , \tag{3.40}$$

her er ds et vektorielt baneelement, og $\oint$ betyder integration en gang rundt langs den lukkede cirkelbane. Ved brug af Stokes sætning om integration af vektorfelter samt (3.39), (3.35) og (3.37) kan (3.40) omskrives som følger, se også Fig. 3.4a,

$$\begin{aligned} \Delta w_\perp &= q \int_A (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = -q \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\ &= -q \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{A} = -q \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \frac{\boldsymbol{\mu}}{q \frac{\omega_c}{2\pi}} = \frac{w_\perp}{B^2} \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{B} . \end{aligned} \tag{3.41}$$

Sløjfens areal opfattes i (3.41) som en vektor parallel med $\boldsymbol{\mu}$. $\Delta \mathbf{B}$ er ændringen i **B**-feltet i løbet af en gyroperiode, $2\pi/\omega_c$. (3.41) giver nu direkte $\Delta w_\perp / w_\perp = \Delta B/B$ eller

$$\mu = \frac{w_\perp}{B} = konst . \tag{3.42}$$

Heraf ses, at det magnetiske moment holder sig konstant under bevægelsen. Betingelsen (3.34) om langsom feltvariation er brugt implicit, nemlig ved antagelsen, at **A** i (3.41) er en veldefineret størrelse. Kun i grænsen $\partial \mathbf{B}/\partial t \to 0$ er partiklens bane en lukket cirkel. For endelige værdier af $\partial \mathbf{B}/\partial t$ bliver banen spiralformet, og dermed bliver arealet dårligt defineret.

Kombination af (3.11) og (3.36) giver

$$\mu = \frac{q^2}{2\pi m} (\pi r_c^2 B) . \tag{3.43}$$

Gyrobanens omsluttede flux er konstant

Da μ er en konstant, fremgår af (3.43), at den flux, som partiklens gyrobane omslutter, også er konstant.

Magnetiske spejlmaskiner

Vi betragter nu en ladet partikel, der bevæger sig i et tidsuafhængigt, men inhomogent magnetfelt, som vist på Fig. 3.4b. Partiklens hastighedsvektor har en komponent i feltets retning, og feltets retning og feltets styrke varierer også i feltliniernes retning. Det antages, at partiklen bevæger sig så langsomt langs fletlinierne, at

$$\frac{v_{\parallel}}{\omega_c} \nabla_{\parallel} B \langle\langle B \ . \tag{3.44}$$

$\nabla_{\parallel}B$ betyder den afledede af B i **B**-liniernes retning.

Set fra det koordinatsystem, der bevæger sig med hastigheden $\mathbf{v}_{\parallel}$, bevæger partiklen sig i et felt, der varierer langsomt i tid, dvs. (3.34) er opfyldt, og partiklens magnetiske moment holder sig derfor konstant. Ydermere vil ifølge (3.43) den flux, som partikelbanen omslutter, være konstant, hvilket indebærer, at partiklen bevæger sig på overfladen af et kraftlinierør, som antydet på Fig. 3.4b.

Af μ's invarians følger, at ladede partikler kan reflekteres fra områder med stærkt magnetfelt. Dette udnyttes i de såkaldte magnetiske spejlmaskiner, hvis magnetfeltkonfiguration er vist på Fig. 3.4c. Magnetfeltet genereres af to spoler med fælles akse og med samme strømretning. Feltstyrken er lille midt i maskinen (B_0 på Fig. 3.4d) og vokser ud mod spolerne for at nå sin maximale værdi, B_{max}, nær spolernes midtplan. Lad os betragte en partikel, der passerer maskinens midtplan, $z = 0$, med en hastighedsvektor v_o, der danner vinklen θ_0 med magnetfeltlinierne. Dens hastighedskomponent vinkelret på magnetfeltet er

$$v_{o\perp} = v_o \sin\theta_o \ . \tag{3.45}$$

Når partiklen har bevæget sig et stykke ud mod en af spolerne, hvor feltstyrken er B, har den hastighedsvektoren **v**, som nu danner vinklen θ med magnetfeltlinierne, og der gælder

$$v_{\perp} = v_o \sin\theta \ . \tag{3.46}$$

($v = v_0$ da magnetfeltet intet arbejde kan udføre).

Betingelsen μ = konstant giver

$$\frac{m v_{o\perp}^2}{2B_o} = \frac{m v_{\perp}^2}{2B} \ , \tag{3.47}$$

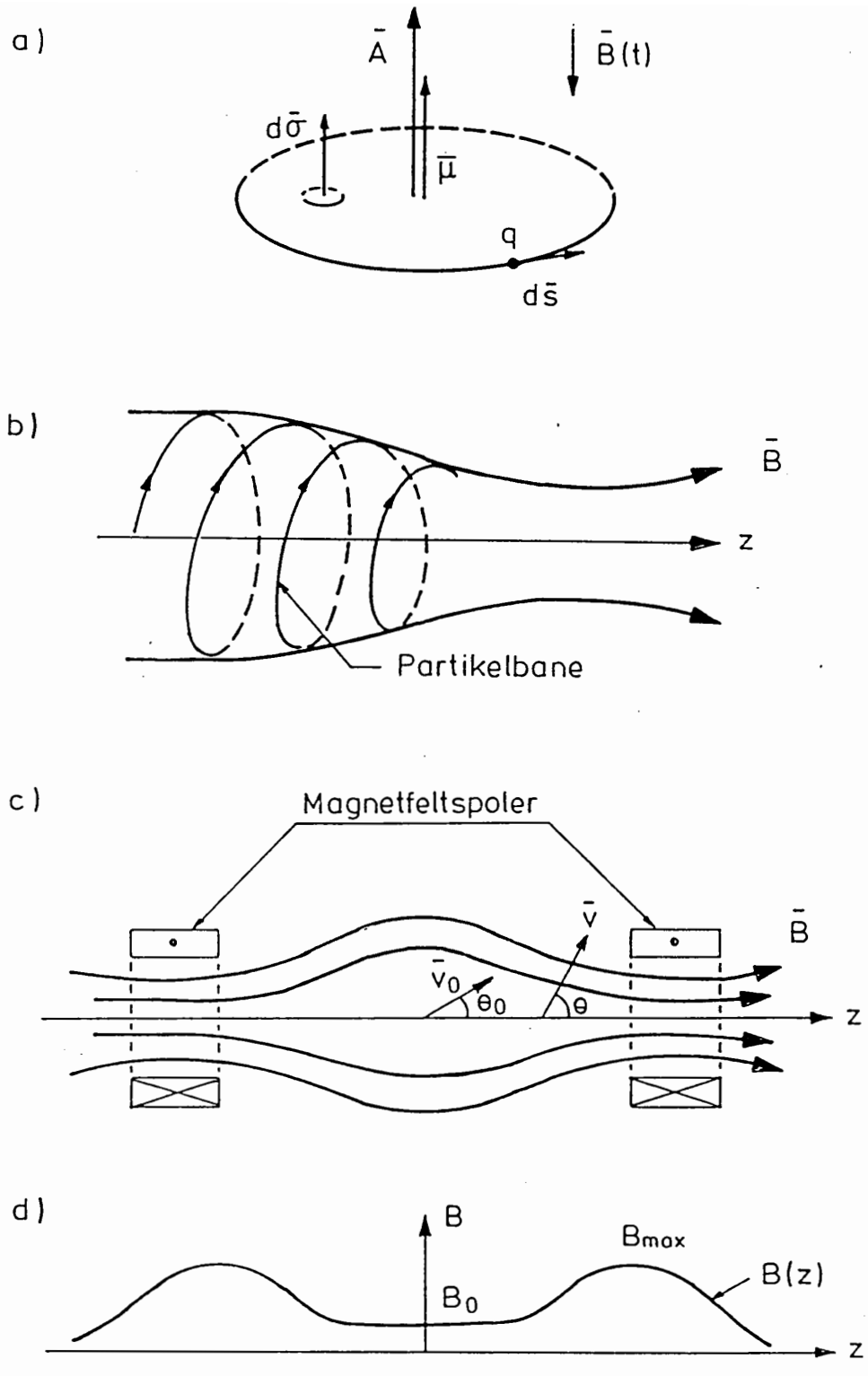

Fig. 3.4. a) Skematisk fremstilling af magnetisk moment.
b) Partikelbane i felt med gradient i feltretningen.
c) Magnetisk spejlmaskine.
d) Magnetfeltstyrke i magnetisk spejlmaskine.

eller med (3.45) og (3.46) indsat

$$\frac{sin^2\theta_o}{B_o} = \frac{sin^2\theta}{B} \,. \tag{3.48}$$

Heraf fremgår, at partiklen, der vender når $\theta = 90°$, vil blive reflekteret i det punkt, hvor

$$B = \frac{B_o}{\sin^2\theta_o} \,. \tag{3.49}$$

Det fremgår yderligere, at alle partikler, som midt i maskinen har en hastighedsvektor, hvis vinkel med feltlinierne er større end en bestemt værdi, θ_o', vil blive reflekteret, inden de passerer punktet med maksimalt magnetfelt, B_{max}. θ_o', bestemmes af

$$\sin^2\theta_o' = \frac{B_o}{B_{max}} = f_M \,. \tag{3.50}$$

Partikler, som midt i maskinen har vinkler med feltlinierne, som er mindre end θ_o', vil ikke kunne reflekteres; de løber ud af maskinen gennem det stærke felt. f_M kaldes det magnetiske spejlforhold.

Loss cone fordeling

En spejlmaskine kan altså i princippet holde et plasma indesluttet, men hastighedsfordelingsfunktionen for det indesluttede plasma er speciel, idet der ikke findes partikler med hastigheder inden for en konus med vinklen θ_o'. Denne konus kaldes tabskonus (loss cone), og det har vist sig, at manglen på partikler med hastighedsvektorer i denne konus bevirker, at plasmaet bliver ustabilt. Det er kun gennem de sidste få år, der er fundet metoder, hvorved disse instabiliteter kan undertrykkes; men alligevel er chancerne for, at spejlmaskiner kan udvikles til fusionsreaktorer, ret små.

3.3.2. Den longitudinale invariant

Den longitudinale invariant, J, er en anden adiabatisk invariant af betydning for magnetiske spejlmaskiner. Den generelle definition er

$$J = \oint_{S_1}^{S_2} v_{\parallel} ds \,, \tag{3.51}$$

hvor ds er et linieelement på ledecentrets bane. S_1 og S_2 er de to magnetiske spejlpunkter, hvor partiklen reflekteres, deres position ændrer sig langsomt med tiden.

Vi nøjes her med at vise, at J er en adiabatisk invariant for den simple situation, hvor S_1 og S_2 betragtes som hårde vægge, som partiklen støder elastisk imod, medens dens hastighed holder sig konstant mellem stødene. Vi antager, at kun S_2 bevæger sig, og at den som antydet på Fig. 3.5 har hastigheden V i retning mod S_1. Afstanden mellem S_1 og S_2 kaldes L(t), og der gælder $dL(t)/dt = -V$.

En ladet partikel, P, der oscillerer mellem S_1 og S_2 og har hastigheden $v_\parallel(t)$, vil få $v_\parallel$ forøget med 2V, hver gang den reflekteres fra S_2. Frekvensen, hvormed P kolliderer med S_2 , er $v_\parallel(t)/2L$, og derfor er tilvæksten i partiklens parallelle hastighed givet ved

$$\frac{dv_\parallel(t)}{dt} = 2V\frac{v_\parallel}{2L} = -\frac{v_\parallel}{L}\frac{dL(t)}{dt} . \qquad (3.52)$$

Heraf følger

$$J = v_\parallel L = konst. \qquad (3.53)$$

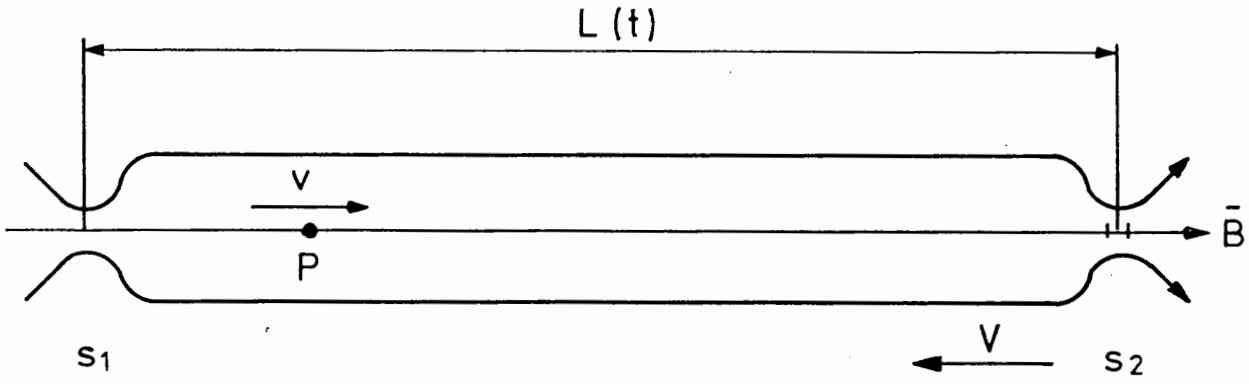

Fig. 3.5. Ladet partikels reflektion mellem bevægelige spejle.

Beviset for, at J som givet ved den generelle definition (3.51) er en adiabatisk invariant, kan f.eks. findes i [10].

At $v_\parallel L$ holder sig konstant, når spejlene nærmer sig hinanden, betyder, at partiklens hastighed vokser, den bliver mere energirig. Fermi har foreslået, at denne mekanisme skulle være ansvarlig for accelerationen af nogle af de højenergetiske partikler i det interstellare rum. Han går ud fra, at der i universet findes bevægelige spejlfelter, f.eks. tæt ved stjernerne.

3.3.3. Den adiabatiske fluxinvariant

Vi betragter igen den magnetiske spejlkonfiguration på Fig. 3.4c. Vi ser på en ladet partikel, hvis gyrocenter, der ofte kaldes ledecenter, ligger på en af de krumme magnetfeltlinier uden for systemets akse. Hvis magnetfeltliniens krumningsradius er R og den parallelle hastighed $v_{\parallel}$, føler den en udadrettet centrifugalkraft K_c, som allerede er diskuteret i afsnit 3.2.6, og som har størrelsen $mv_{\parallel}^2/R$. Da denne kraft står vinkelret på magnetfeltlinierne, bevirker den, at den ladede partikel får en drifthastighed i azimutal retning, som vist for en positiv partikel på Fig. 3.6.

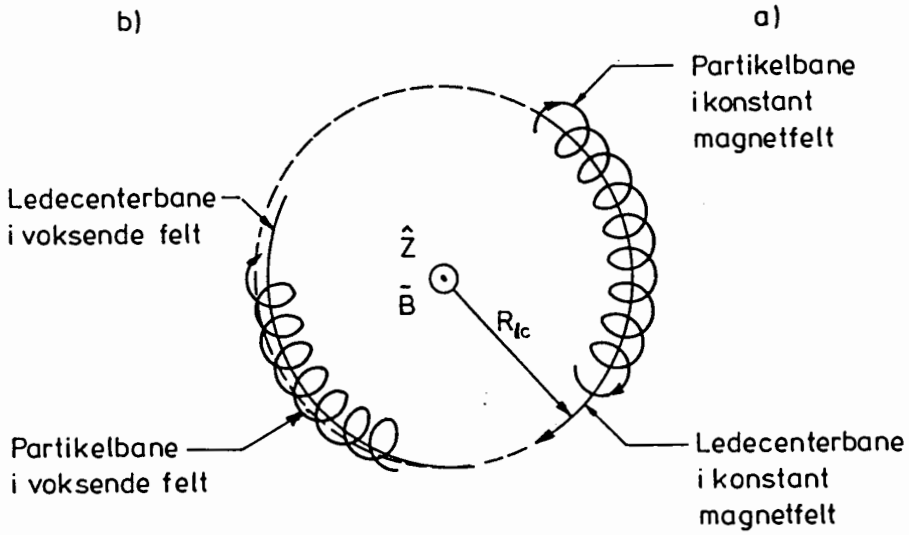

Fig. 3.6. Snit vinkelret på magnetfeltlinierne i en spejlmaskine, der viser en positiv partikels drift rundt om aksen. a) i tidsuafhængigt magnetfelt, b) i voksende magnetfelt.

Ledecenterbanens omsluttede flux er konstant

Det skal nu vises, at den magnetiske flux, som ledecentrets bane omslutter, er en adiabatisk invariant, hvis magnetfeltet ændrer sig langsomt, dvs. hvis

$$\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial t} \ll \omega_{lc} , \tag{3.54}$$

hvor ω_{lc} er den vinkelfrekvens, hvormed ledecentret roterer omkring aksen. B-feltets tidsvariation inducerer et elektrisk felt langs ledecentrets bane, som ved hjælp af (3.39) findes at være

$$E_{lc} = \frac{\pi R_{lc}^2}{2\pi R_{lc}}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2}R_{lc}\frac{\partial B}{\partial t} , \tag{3.55}$$

hvor R_{lc} er ledecenterbanens krumningsradius. Hvis $\partial B/\partial t > 0$, er E_{lc} rettet samme vej, som partiklen driver, og det giver anledning til en $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-drift, som får partiklens ledecenter til at nærme sig aksen med hastigheden

$$-\frac{dR_{lc}}{dt} = \frac{1}{2}R_{lc}\frac{\partial B}{\partial t}\frac{1}{B} . \tag{3.56}$$

Fluxen gennem ledecenterbanen ændrer sig, dels fordi B-feltet vokser, og dels fordi R_{lc} aftager. Vi finder for fluxen

$$\frac{d\phi_{lc}}{dt} = \pi R_{lc}^2\frac{\partial B}{\partial t} + 2\pi R_{lc}\frac{dR_{lc}}{dt}B , \tag{3.57}$$

der med (3.56) bliver

$$\frac{d\phi_{lc}}{dt} = 0 , \tag{3.58}$$

som viser, at den flux, som ledecenterbanen omslutter, holder sig konstant. Betingelsen (3.54) om langsom feltvariation er igen kun brugt indirekte, nemlig ved antagelsen om, at det areal, som ledecenterbanen omslutter, er en veldefineret størrelse. For hurtige feltvariationer er det ikke tilfældet.

3.3.4. Nogle konsekvenser af adiabatiske invarianter

I aktuelle plasmafysiske situationer, er de adiabatiske invarianter først og fremmest hjælpestørrelser ved beregning af partikelbaner. Alene eller sammen med f.eks. loven om energiens konstant i tidsuafhængige felter udgør de et ligningssæt, som på simpel måde muliggør beregningen af partikelbaner selv i komplicerede feltkonfigurationer. Når partikelbanerne er kendte, kan man ofte udlede interessante plasmaegenskaber.

Vi ser først på en ladet partikels bevægelse i en simpel spejlfeltkonfiguration. Vi har set, at der er tre periodiske bevægelser for en sådan partikel, og at der til hver af disse bevægelser er knyttet en adiabatisk invariant:

1) gyrorotationen omkring magnetfeltlinierne med det magnetiske moment som adiabatisk invariant
2) oscillationen frem og tilbage mellem spejlene, hvortil den longitudinale invariant er knyttet
3) partiklens gyrocenters rotation omkring spejlfeltets symmetriakse, hvortil fluxinvarianten er knyttet.

I alle konfigurationer af betydning i fusionforskningen er frekvensen i gyrorotationen meget større end frekvensen i oscillationen mellem spejlene, som igen er større end frekvensen i rotationen omkring symmetriaksen. Den samlede bevægelse for en partikel i et spejlfelt bliver derfor en hurtig rotation omkring en magnetfeltlinie, som er overlejret en langsommere oscillation frem og tilbage mellem spejlene, som så igen er overlejret en endnu langsommere drift rundt i azimutal retning omkring konfigurationens symmetriakse.

Hvis vi nu lader spejlfeltkonfigurationen ændre sig med tiden, giver de adiabatiske invarianter os yderligere oplysninger. Vi tænker os først, at de to spejle bringes til at bevæge sig mod hinanden. Da den longitudinale invariant, $Lv_{\parallel}$, (3.53) ikke ændrer sig, vil de partikler, der er indesluttet mellem spejlene, få forøget deres parallelle hastighed og dermed deres energi. En langsom kompression i longitudinal retning af et plasma i et spejlfelt vil derfor medføre en opvarmning.

Vi tænker os nu, at vi øger magnetfeltet blot ved at forøge strømmen i spolerne. Idet feltforøgelsen vil fordele sig over hele tværsnittet, følger det af fluxinvarianten (3.58), at plasmaet vil komprimeres i radial retning. Samtidig vil de ladede partiklers vinkelrette hastighed og dermed energi vokse, da det magnetiske moment, (3.36), forbliver uændret. Altså vil et plasma, som komprimeres i retningen vinkelret på magnetfeltlinierne i et voksende magnetfelt, få forøget sin temperatur.

Adiabatisk opvarmning ved kompression af et plasma i et magnetfelt er demonstreret eksperimentelt. Opvarmning ved kompresion af et fusionsplasma med henblik på at nå de nødvendige høje temperaturer må betragtes som en seriøs mulighed, specielt hvis plasmaets temperatur er bragt op i nærheden af fusionstemperaturen ved hjælp af andre opvarmningsmetoder.

4. FLUIDBESKRIVELSEN

I kapitel 3 diskuteredes, hvordan enkelte ladede partikler bevæger sig i forskellige feltkonfigurationer. Betragter man imidlertid et plasma, der måske består af 10^{18} til 10^{20} eller flere partikler, er man kun i ringe grad interesseret i at følge de enkelte partikler. Man vil snarere være interesseret i at kende størrelser som lokale tætheder, tryk, temperaturer, hastigheder, strømme osv. Problemet er analogt med, hvad der kendes fra gasteorien, hvor man også må opgive at følge hver enkelt partikel og nøjes med at behandle visse middelværdier som de ovenfor nævnte.

Fluidligningerne eller de magnetohydrodynamiske ligninger (MHD-ligningerne) er et sæt ligninger, som sammenknytter lokale plasmastørrelser af ovennævnte typer. I deres natur svarer de til de velkendte ligninger for neutrale gassers dynamik, de er blot mere komplicerede, fordi elektriske og magnetiske kræfter spiller en rolle i plasmaer. Navnet magnetohydrodynamiske ligninger reflekterer netop betydningen af elektromagnetiske kræfter.

I deres fuldstændige form beskriver fluidligningerne næsten alle plasmafysiske egenskaber ved et plasma; som eksempler kan nævnes et plasmas samlede bevægelse, dets stabilitet, dets vekselvirkning med ydre stråling etc. Alt efter hvilke plasmaegenskaber man ønsker at beregne, bruges fluidligningerne på forskellige former. Disse forskellige former opnås ved at indføre forskellige tilnærmelser i de fuldstændige fluidligninger, som passer for de egenskaber, man vil behandle. Det er f.eks. let at forstå, at det ikke er de samme led, der dominerer i en behandling af et plasmas vekselvirkning med synligt lys med den karakteristiske tidsskala $\omega^{-1} \approx 10^{-14}$ s og i behandlingen af et plasmas indeslutning i en magnetfeltkonfiguration, hvor den karakteristiske tidsskala måske er mange sekunder.

I dette kapitel skal vi vise, hvorledes fluidligningerne kan udledes. Vi vil specielt diskutere fluidligningerne på den form, der kaldes de ideale magnetohydrodynamiske ligninger. Ideal magnetohydrodynamik (ideal MHD) er specielt egnet til at forudsige ligevægts- og stabilitetsforhold for plasmaer, der søges indesluttet i toroidale magnetfeltkonfigurationer, som f.eks. tokamakkonfigurationen. Tidsskalaen for ideal MHD er relativ lang, af størrelsesordenen sekund for mange plasmaer.

4.1. Boltzmannligningen. Den Kinetiske Beskrivelse

Udgangspunktet for udledningen af fluidligninger for et plasma er Boltzmannligningen, som også er velkendt fra den kinetiske gasteori. Boltzmannligningen beskriver, hvordan fordelingsfunktionen for en samling partikler i

et kraftfelt ændrer sig med tiden. Vi har allerede i kapitel 1 og i Appendiks 1 omtalt fordelingsfunktioner i hastighedsrummet, her må vi arbejde med fordelingsfunktioner, der også afhænger af rumkoordinaterne og af tiden.

Udledning af Boltzmannligningen. Lagrangeformalisme

Lad os betragte en samling ens partikler med massen m og ladningen q, der befinder sig i et område med elektriske og magnetiske felter, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ og $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. For disse partikler indfører vi den rum-, hastigheds- og tidsafhængige fordelingsfunktion $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$, der er defineret ved, at $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$ er lig antallet af partikler, som til tiden t befinder sig i rumelementet $d^3\mathbf{r}$ omkring $\mathbf{r}$, og som har hastigheder i hastighedselementet $d^3\mathbf{v}$ omkring $\mathbf{v}$. Ved udledningen af Boltzmannligningen ser vi først bort fra stød mellem partiklerne. Det gælder derfor, at de $f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3\mathbf{r}_t d^3\mathbf{v}_t$ partikler, der til tiden, t, befinder sig i faseelementet $d^3\mathbf{r}_t d^3\mathbf{v}_t$ omkring $(\mathbf{r},\mathbf{v})$, bevæger sig på en sådan måde, at de til et senere tidspunkt, $t + \delta t$, alle vil befinde sig i faseelementet $d^3\mathbf{r}_{t+\delta t}\, d^3\mathbf{v}_{t+\delta t}$ omkring

$$\left\{\left(\mathbf{r} + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\delta t\right), \left(\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{v}}{dt}\delta t\right)\right\} .$$

Der gælder derfor

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3\mathbf{r}_t d^3\mathbf{v}_t =$$

$$f\left\{(\mathbf{r} + \mathbf{v}\delta t), \left(\mathbf{v} + \frac{\mathbf{K}}{m}\delta t\right), (t + \delta t)\right\} d^3\mathbf{r}_{t+\delta t} d^3\mathbf{v}_{t+\delta t} , \qquad (4.1)$$

idet vi har benyttet, at

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \quad \text{og} \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathbf{K}}{\mathrm{m}} ,$$

hvor $\mathbf{K} = \mathrm{q}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ er den kraft, der påvirker partiklerne.

Invariant faseelement

Det skal nu vises, at der for kræfter af den ovennævnte elektromagnetiske type, hvor kraften, der påvirker en partikel, er uafhængig af partiklens hastighed i kraftens retning, vil gælde, at faseelementet er konstant i tid, altså at

$$d^3\mathbf{r}_t d^3\mathbf{v}_t = d^3\mathbf{r}_{t+\delta t} d^3\mathbf{v}_{t+\delta t} . \qquad (4.2)$$

For at bevise (4.2) betaler det sig først at se på det todimensionale faseelement $\Delta x \Delta v_x$, som er afbildet til $t = 0$ som rektanglet ABCD på Fig. 4.1.

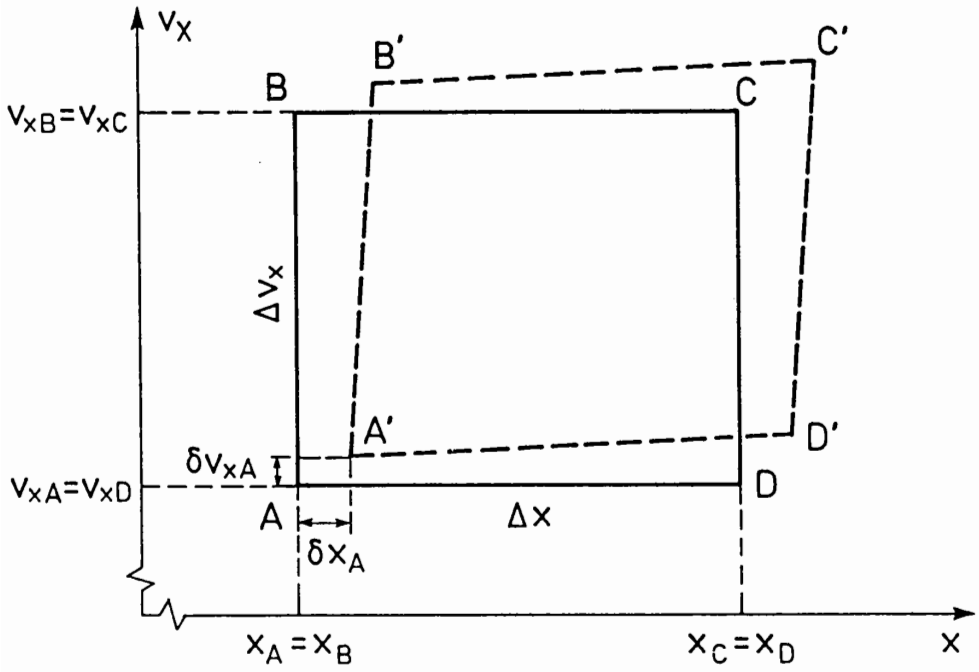

Fig. 4.1. Bevægelse af faseelementet $\Delta x \Delta v_x$ i løbet af tiden δt.

Partiklerne påvirkes af en kraft i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen, som til første orden i δx kan skrives som

$$K(x_A + \delta x) = K(x_A) + K'(x_A)\delta x \, . \tag{4.3}$$

Efter et differentielt tidsinterval, δt, har rektanglet forskudt sig og ændret form til figuren A'B'C'D', hvor forskydningerne for de fire hjørnepunkter til første orden i δt er givet ved

$$\begin{aligned} \delta x_I &= v_{xI}\delta t \\ \delta v_{xI} &= \frac{K(x_I)}{m}\delta t \, , \\ I &= A, B, C, D. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Der er to typer 2.-ordensled i δt, der er udeladt i (4.4). For det første er der i alle udtryk for δx udeladt led af formen ½ K/m $(\delta t)^2$; for det andet er de led i udtrykkene for forskydningerne, der skyldes, at kraftpåvirkningen ændrer sig, når punkterne bevæger sig i x-retningen, ikke medtaget. Det skyldes, at forskydningerne og dermed ændringerne i kræfterne er proportionale med δt (se 4.3); virkningen bliver således proportional med $(\delta t)^2$.

Arealet af figur ABCD er givet ved

$$F = \Delta x \Delta v_x \ . \tag{4.5}$$

For ændringen i F i løbet af tiden δt har vi til første orden

$$\begin{aligned} \delta F \ = \ & \frac{1}{2}\{(-\delta x_A - \delta x_B + \delta x_C + \delta x_D)\,\Delta v_x \\ & + (-\delta v_{xA} + \delta v_{xB} + \delta v_{xC} - \delta v_{xD})\,\Delta x\} \ . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Indsættes heri ligningerne (4.4) samt relationerne mellem koordinaterne, der fremgår af Fig. 4.1, findes $\delta F = 0 \delta t$. Altså vil arealet af et faseelement holde sig konstant. Analogt kan sluttes, at faseelementarealer i (y,v_y)-planen og i (z,v_z)-planen hver for sig også holder sig konstant. Hermed er (4.2) bevist.

Med (4.2) kan (4.1) skrives

$$f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} =$$

$$f\left\{(\mathbf{r}+\mathbf{v}\delta t)\,,\left(\mathbf{v}+\frac{\mathbf{K}}{m}\delta t\right),(t+\delta t)\right\} d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} \ . \tag{4.7}$$

Hvis der tages hensyn til stød, kommer der et korrektionsled i ligning (4.7). Når et faseelement $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$ bevæger sig gennem faserummet, vil der være partikler, som ved stød bliver slået ud af elementet, og andre partikler, som ikke ligger i elementet, vil blive slået ind i dette. Antallet af partikler i elementet ændrer sig, og da denne ændring er proportional med elementets størrelse $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$ og med det tidsinterval δt, som vi betragter, kan den skrives på formen $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{stød}} d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}\delta t$. $\left(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{t}}\right)_{\text{stød}}$ er en proportionalitetsfaktor, der angiver, hvor effektive stød er til at ændre fordelingsfunktionen. Med stødleddet medtaget kan (4.7) skrives på formen

$$f\left\{(\mathbf{r}+\mathbf{v}\delta t)\,,\left(\mathbf{v}+\frac{\mathbf{K}}{m}\delta t\right),(t+\delta t)\right\} d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v} - f\,(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\,d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{stød}} d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}\delta t \ .$$

Efter divisionen med $d^3\mathbf{r}d^3\mathbf{v}\delta t$ fås, når man lader $\delta t \to 0$,

$$\frac{df(\mathbf{r},\mathbf{v},t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_r f + \frac{\mathbf{K}}{m}\cdot\nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{stød}} \ . \tag{4.8}$$

Boltzmannligningen

Ligning (4.8) kaldes **Boltzmannligningen.** I den indførte notation betyder

$$\nabla_r f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

og

$$\nabla_v f = \frac{\partial f}{\partial v_x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial v_y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial v_z}\hat{\mathbf{z}} .$$

Eulerformalisme

Ovenstående udledning af Boltzmannligningen støtter sig på en Lagrangeformalisme, hvor man følger plasmaets partikler, medens de flyder gennem faserummet. Da Boltzmannligninger danner hele grundlaget for den teoretiske plasmafysik, er der i Appendiks 3 vist en alternativ udledning af Boltzmannligningen, som støtter sig på en Eulerformalisme, hvor man studerer situationen i et fast punkt i faserummet. De to udledninger er naturligvis lige gode, men det kan have interesse at se begge metoder.

I de plasmaer, vi betragter, er der to slags partikler: elektroner med fordelingsfunktionen $f_e(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ og ioner med fordelingsfunktionen $f_i(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$. Vi har derfor to Boltzmannligninger:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_r f_e - \frac{e}{m_e}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\nabla_v f_e = \left(\frac{\partial f_e}{\partial t}\right)_{\text{stød}} \qquad (4.9)$$

og

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla_r f_i + \frac{e}{m_i}(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\nabla_v f_i = \left(\frac{\partial f_i}{\partial t}\right)_{\text{stød}} . \qquad (4.10)$$

Påtrykte og kollektive felter

I Boltzmannligningerne består **E**- og **B**-felterne af henholdsvis ydre påtrykte felter og af indre felter, som er genereret af kollektive, langtrækkende (> Debye-længden) vekselvirkninger i plasmaet. Sådanne kollektive vekselvirkninger kan være opbygning af rumladningstætheder, der giver anledning til elektriske felter, eller af plasmastrømme, der genererer **B**-felter. Stødleddet på højre side i Boltzmannligningerne beskriver virkningen af de kortrækkende (< Debye-længden) vekselvirkninger mellem partiklerne.

Allerede i kapitel 1 blev det vist, at stød er sjældne begivenheder i varme plasmaer, det er derfor ofte en god tilnærmelse at negligere stødleddet på højre side af Boltzmannligningen. Herved kommer man til at arbejde med **Vlasovligningerne:**

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f_e - \frac{e}{m_e}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_e = 0 \qquad (4.11)$$

og

Vlasovligningerne

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f_i + \frac{e}{m_i}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_v f_i = 0 \,. \qquad (4.12)$$

Foruden fordelingsfunktionerne indeholder Boltzmann/Vlasovligningerne de variable **E**- og **B**-felter. Disse kan bestemmes ved hjælp af Maxwell-ligningerne:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad (4.13)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j} + \mu_o \varepsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad (4.14)$$

Maxwell-ligningerne

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_o} \qquad (4.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \,. \qquad (4.16)$$

Her er $\rho(\mathbf{r},t)$ rumladningstætheden i plasmaet, og $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ er strømtætheden; ρ og $\mathbf{j}$ kaldes ofte felternes kilder. Et lukket ligningssystem opnåes ved at beregne $\rho(\mathbf{r},t)$ og $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$ ud fra momenter af fordelingsfunktionerne. Idet der gælder

$$n_e(\mathbf{r},t) = \int f_e(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3\mathbf{v} \qquad (4.17)$$

Elektrontæthed

og

$$n_i(\mathbf{r},t) = \int f_i(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3\mathbf{v} \,, \qquad (4.18)$$

Iontæthed

fås for rumladningstætheden

$$\rho(\mathbf{r},t) = e\{n_i(\mathbf{r},t) - n_e(\mathbf{r},t)\} \; . \qquad (4.19)$$ *Rumladningstæthed*

Der mindes om, at integralerne i (4.17) og (4.18) skal udføres over de 3 hastighedskomponenter fra $-\infty$ til $+\infty$.

For at finde et udtryk svarende til (4.19) for strømtætheden benytter man, at middelværdien taget over v-rummet af en størrelse Q(v) er defineret ved

$$\langle Q(\mathbf{r},t)\rangle = n(\mathbf{r},t)^{-1} \int Q(\mathbf{v}) f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3\mathbf{v} \; . \qquad (4.20)$$

For at beregne strømtætheden beregnes først middelværdien af hastigheden (vindhastigheden) for de to slags partikler. Ved brug af (4.20) fås:

$$\langle \mathbf{v}_e(\mathbf{r},t)\rangle = n_e(\mathbf{r},t)^{-1} \int \mathbf{v} f_e(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3\mathbf{v} \qquad (4.21)$$ *Elektronfluidhastighed*

og

$$\langle \mathbf{v}_i(\mathbf{r},t)\rangle = n_i(\mathbf{r},t)^{-1} \int \mathbf{v} f_i(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3\mathbf{v} \; , \qquad (4.22)$$ *Ionfluidhastighed*

som direkte fører til

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = e\{n_i(\mathbf{r},t)\langle \mathbf{v}_i(\mathbf{r},t)\rangle - n_e(\mathbf{r},t)\langle \mathbf{v}_e(\mathbf{r},t)\rangle\} \; . \qquad (4.23)$$ *Strømtæthed*

Ligningerne for kilderne (4.19) og (4.23) og Maxwell-ligningerne (4.13) - (4.16) udgør sammen med Boltzmannligningerne (4.9) og (4.10) - eller for det stødfri tilfælde Vlasovligningerne (4.11) og (4.12) - et lukket system af ligninger, der kan bruges til at beregne et plasmas egenskaber og opførsel. På Fig. 4.2 er på skematisk form vist, hvordan disse ligninger er sammenkoblet.

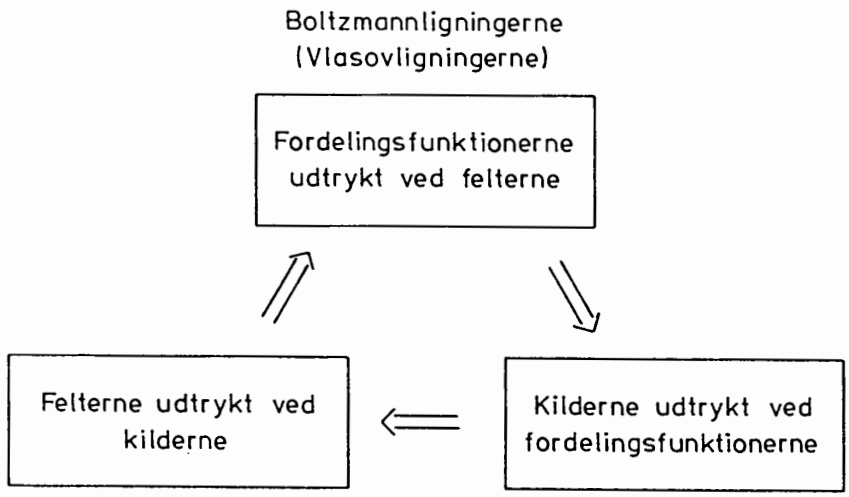

Fig. 4.2. Koblingerne mellem plasmaligningerne.

Det lukkede system af ligninger udgør et fuldstændigt og eksakt ligningssystem til bestemmelse af de variable størrelser $f_e(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$, $f_i(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$, $\rho(\mathbf{r},t)$ og $\mathbf{j}(\mathbf{r},t)$. Ligningssystemet kaldes ofte de kinetiske ligninger eller den kinetiske beskrivelse, fordi det faktisk via Boltzmann/Vlasovligningerne beskriver de enkelte partiklers kinematik. Det viser sig imidlertid ofte yderst kompliceret at benytte dette system til løsning af plasmafysiske problemer, hvor man oftest har meget komplicerede feltkonfigurationer. Den største komplikation ved ligningssystemet skyldes, at fordelingsfunktionerne afhænger af hele syv uafhængige variable, nemlig af tre rumkoordinater, tre hastighedskoordinater og tiden. De øvrige størrelser afhænger kun af de tre rumkoordinater og af tiden. For overhovedet at kunne behandle mange problemer er det nødvendigt at forenkle ligningssystemet. I fluidbeskrivelsen opnås et simplere system, idet man fjerner v-afhængigheden ved at tage momenter af Boltzmann-/Vlasovligningen i v-rummet. Herved møder man det problem, at man får en uendelig række ligninger, som man kun kan få brudt ved at gøre nogle mere eller mindre velargumenterede antagelser. Fluidbeskrivelsen bliver derfor ikke eksakt, men den fører til et ligningssystem, der er til at håndtere, og som i mange tilfælde giver brugbare resultater.

4.2. Fluidligningerne

I dette afsnit vises principperne, der benyttes ved udledning af fluidligningerne. For en detaljeret gennemgang af de matematiske skridt i udledningerne henvises til lærebøger og artikler, specielt kan anbefales [2], [10], [12] og [13]. Fluidligningerne præsenteres på forskellige former, og afsnittet afsluttes med at opskrive og diskutere fluidligningerne på den form, der kaldes ideal magnetohydrodynamik. I kapitel 5 bruges ligningerne for ideal MHD til at diskutere forskellige toroidale magnetfeltkonfigurationer med henblik på deres evne til at holde fusionsplasmaer indesluttet.

Momenter af Boltzmannligningen

Som nævnt opnås fluidligningerne ved at multiplicere Boltzmannligningen (4.8) med $\mathbf{v}$ i forskellige potenser og integrere over v-rummet. Vi kommer altså til at arbejde med ligninger af formen

$$\int \left\{ \frac{df_\alpha}{dt} - \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{\text{stød}} \right\} Q_i(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = 0 \,, \tag{4.24}$$

hvor α repræsenterer partikelarten, ioner eller elektroner. For $Q_i(\mathbf{v})$ vælger vi følgende tre funktioner:

$$Q_1 = 1, \quad Q_2 = m_\alpha \mathbf{v} \quad og \quad Q_3 = \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}^2 \,. \tag{4.25}$$

Behandling af stødledene

I behandlingen af (4.24) ser vi først på det led, der har med stød at gøre. Det led beskriver den tidsafledede af f_α-funktionen, som skyldes Coulomb-kollisioner både mellem ens partikler (α mod α) og mellem uens partikler (α mod β), hvor β beskriver den anden partikeltype i plasmaet. Uden i detaljer at beskrive kollisionerne kan vi få værdifulde oplysninger om stødleddene i (4.24) blot ved at benytte de bevaringslove, der kendes for elastiske kollisioner, som Coulomb-kollisioner jo er. Vi definerer

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t}\right)_{\text{stød}} \equiv C_{\alpha\alpha} + C_{\alpha\beta} \,, \tag{4.26}$$

hvor $C_{\alpha\alpha}$ altså repræsenterer virkningen på f_α af indbyrdes stød mellem partikler af α-typen, medens $C_{\alpha\beta}$ beskriver virkningen på f_α af stød mod partikler af β-typen.

Partikelbevaring medfører

$$\int C_{ee}\, d^3\mathbf{v} = \int C_{ii}\, d^3\mathbf{v} = \int C_{ei}\, d^3\mathbf{v} = \int C_{ie}\, d^3\mathbf{v} = 0 \,. \tag{4.27}$$

Bemærk, at de tre sidste ligninger i (4.27) ikke vil være opfyldt i et plasma, hvor der dannes eller forsvinder partikler ved stødprocesser. Ionisering, rekombination og kerneprocesser er eksempler på sådanne stødprocesser. I denne behandling ser vi bort fra sådanne processer.

Da både bevægelsesmængde og kinetisk energi er bevarede størrelser under elastiske kollisioner, gælder der for stød mellem ens partikler

$$\int m_e \mathbf{v} C_{ee}\, d^3\mathbf{v} = \int m_i \mathbf{v} C_{ii}\, d^3\mathbf{v} = 0 \tag{4.28}$$

og

$$\int \frac{1}{2} m_e v^2 C_{ee}\, d^3\mathbf{v} = \int \frac{1}{2} m_i v^2 C_{ii}\, d^3\mathbf{v} = 0 \,, \tag{4.29}$$

og for stød mellem uens partikler

$$\int (m_e \mathbf{v} C_{ei} + m_i \mathbf{v} C_{ie})\, d^3\mathbf{v} = 0 \tag{4.30}$$

og

$$\int \frac{1}{2} (m_e v^2 C_{ei} + m_i v^2 C_{ie})\, d^3\bar{\mathbf{v}} = 0 \,. \tag{4.31}$$

Bemærk, at alle led under integraltegnene i (4.30) og (4.31) er lig nul for et plasma i termisk ligevægt. For et strømførende plasma vil det senere blive vist, at de to led i (4.30) kan udtrykkes ved strømmen i plasmaet og dets specifikke modstand.

Behandling af df/dt-ledene

Første led i (4.24) består af 3 led, som det fremgår af (4.8). Integration af disse led med de tre Q(**v**)-funktioner i (4.25) er simpel, men langvarig, og skal ikke gennemføres her. En detaljeret udledning kan findes i Appendiks 4.

Med Q(**v**) = 1 findes

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0 \,. \tag{4.32}$$

Kontinuitetsligningen

Q(**v**) = m_α**v** fører til

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha m_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{vv} \rangle_\alpha) - e_\alpha n_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B})$$

$$= \int m_\alpha \mathbf{v} C_{\alpha\beta} d^3\mathbf{v} \,, \; (\alpha \neq \beta) \,, \tag{4.33}$$

Momentligningen

og endelig fører Q(**v**) = ½ $m_\alpha v^2$ til

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \langle v^2 \rangle_\alpha\right) + \nabla \cdot \left(\frac{1}{2} m_\alpha n_\alpha \langle \mathbf{v} v^2 \rangle_\alpha\right) - e_\alpha n_\alpha \mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_\alpha$$

$$= \int \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \, C_{\alpha\beta} \, d^3\mathbf{v} \,, \; (\alpha \neq \beta) \,. \tag{4.34}$$

Energiligningen

I ligningerne (4.32), (4.33) og (4.34) har vi indført den makroskopiske tæthed defineret ved

$$n_\alpha(\mathbf{r},t) \equiv \int f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3\mathbf{v} \tag{4.35}$$

og strømningshastigheden ved

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{r},t) \equiv \langle \mathbf{v} \rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha} \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3\mathbf{v} \,. \tag{4.36}$$

Endelig er størrelserne $<\mathbf{v}\ \mathbf{v}>_\alpha$, $<v^2>_\alpha$ og $<\mathbf{v}\ v^2>_\alpha$ defineret ved den generelle formel

$$\langle Q(\mathbf{v}) \rangle_\alpha \equiv \frac{1}{n_\alpha} \int Q(\mathbf{v}) f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t) d^3\mathbf{v} \,, \tag{4.37}$$

som svarer helt til (4.20). Bemærk, at i (4.33) er størrelsen $n_\alpha m_\alpha <\mathbf{v}\,\mathbf{v}>_\alpha$ en tensor, den kaldes den totale tryktensor og beskriver det totale tryk (= statisk tryk + vindtryk). I (4.34) er størrelsen $\frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha <v^2>_a$ en skalar, der angiver den kinetiske energitæthed i plasmaet, medens $\frac{1}{2}m_\alpha n_\alpha <\mathbf{v}\,v^2>_\alpha$ er en vektor, der angiver transport af kinetisk energi i plasmaet.

Fluidligningerne (4.32), (4.33) og (4.34) kan bringes på en mere overskuelig form ved at indføre en ny hastighedsvariabel $\mathbf{v}'$ i $f_\alpha(\mathbf{r},\mathbf{v},t)$ givet ved

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\alpha \,. \tag{4.38}$$

$\mathbf{v}'$ repræsenterer altså den tilfældige bevægelse målt i et koordinatsystem, der bevæger sig med strømningshastigheden $\mathbf{u}_\alpha$. Vi ser altså på forholdene i dette medføringssystem, hvor der gælder, at den lokale strømningshastighed $<\mathbf{v}'>_\alpha = 0$.

For faktoren $<\mathbf{v}\,\mathbf{v}>_\alpha$ i tryktensoren i (4.33) findes ved hjælp af (4.38)

$$\langle \mathbf{v}\,\mathbf{v}\rangle_\alpha = \langle(\mathbf{v}' + \mathbf{u}_\alpha)(\mathbf{v}' + \mathbf{u}_\alpha)\rangle_\alpha = \langle \mathbf{v}'\mathbf{v}'\rangle_\alpha + \mathbf{u}_\alpha\mathbf{u}_\alpha \,, \tag{4.39}$$

idet der er benyttet, at $<\mathbf{v}'\mathbf{u}_\alpha>_\alpha = <\mathbf{u}_\alpha\mathbf{v}'>_\alpha = 0$.

Følgende størrelser defineres:

Den statiske tryktensor

$$\underline{\underline{P}}_\alpha \equiv n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{v}'\mathbf{v}'\rangle_\alpha \tag{4.40}$$

Statisk tryktensor

og den skalære del af det statiske tryk

$$p_\alpha \equiv \frac{1}{3} n_\alpha m_\alpha \langle v'^2\rangle_\alpha \,, \tag{4.41}$$

hvorved den anisotrope del af den statiske tryktensor bliver

$$\underline{\underline{\Pi}}_\alpha \equiv \underline{\underline{P}}_\alpha - p_\alpha \underline{\underline{I}} \,. \tag{4.42}$$

Anisotrop del af statisk tryktensor

Desuden defineres temperaturen ved

$$\kappa T_\alpha \equiv p_\alpha n_\alpha^{-1} \,, \tag{4.43}$$

Temperaturdefinition

som jo er den normale temperaturdefinition i en Maxwell-fordelt gas. Her gælder definitionen mere generelt for alle isotrope fordelinger.

For varmefluksen, der skyldes tilfældig bevægelse, defineres

$$\mathbf{h}_\alpha \equiv \frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha \langle \mathbf{v}'v'^2\rangle_\alpha \,, \tag{4.44}$$

Varmefluks

og for bevægelsesmængdeudvekslingen mellem uens partikler ved stød

$$\mathbf{R}_\alpha \equiv \int m_\alpha \mathbf{v}' \, C_{\alpha\beta} \, d^3\mathbf{v}' \,, \tag{4.45}$$

Bevægelsesmængde-udveksling

og endelig for den varme, der genereres ved stød mellem uens partikler,

$$Q_\alpha \equiv \int \frac{1}{2} m_\alpha \mathbf{v}'^2 \, C_{\alpha\beta} \, d^3\mathbf{v}' \,. \tag{4.46}$$

Stødgenereret varme

Indsættes (4.39) til (4.46) i (4.32), (4.33) og (4.34) og benyttes

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_\alpha \cdot \nabla \,, \tag{4.47}$$

findes to-fluidligningerne på formen

$$\frac{dn_\alpha}{dt} + n_\alpha \, \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = 0 \tag{4.48}$$

$$n_\alpha m_\alpha \frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} - e_\alpha n_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \underline{\underline{P}}_\alpha = \mathbf{R}_\alpha \tag{4.49}$$

To-fluidligningerne

$$\frac{3}{2} n_\alpha \frac{d\kappa T_\alpha}{dt} + \underline{\underline{P}}_\alpha : \nabla \mathbf{u}_\alpha + \nabla \cdot \mathbf{h}_\alpha = Q_\alpha \tag{4.50}$$

og Maxwell-ligningerne på formen

$$\begin{aligned}
&\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o e (n_i \mathbf{u}_i - n_e \mathbf{u}_e) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\
&\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\
&\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{e}{\varepsilon_o} (n_i - n_e) \\
&\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \,,
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Maxwell-ligningerne

hvor det er benyttet, at $e_i = -e_e = e$. (4.50) indeholder det dobbelte prikprodukt mellem to tensorer. Det dobbelte prikprodukt er en skalar defineret ved

$$\underline{\underline{T}} : \underline{\underline{S}} = \sum_{i,j} T_{i,j}\, S_{j,i} \,, \tag{4.52}$$

hvor i og j uafhængigt af hinanden antager værdierne 1, 2 og 3.

To-fluidligningernes fortolkning

To-fluidligningerne (4.48)-(4.50) er lette at fortolke. (4.48), der med (4.47) er identisk med (4.32), er en simpel kontinuitetsligning, der blot siger, at der ikke dannes eller forsvinder partikler. (4.49) er en kraftligning (Newtons anden lov), hvor første led repræsenterer masse gange acceleration, og de øvrige led er de forskellige kræfter, der påvirker et rumelement. Endelig er (4.50) en ligning, der beskriver partiklernes energi.

To-fluidligningernes begrænsning

På formen (4.48)-(4.50) er fluidligningerne eksakte, men ikke særlig brugbare. De indeholder forskellige momenter opnået ved at indsætte Q-funktionerne (4.25) i (4.24) og integrere, men der er flere variable størrelser i systemet end ligninger til at bestemme disse variable. Flere ligninger ville kunne opnås ved at vælge endnu højere v-momenter af typen (4.25) og indsætte i (4.24). Dette ville give flere fluidligninger, men også flere variable og altså ikke afhjælpe problemet. I praksis lukker man systemet af fluidligninger ved at indføre nogle antagelser og tilnærmelser, der er afhængige af det problem, man ønsker at behandle.

4.3. Ideal Magnetohydrodynamik

Ligningerne for ideal magnetohydrodynamik udledes ud fra fluidligningerne (4.48)-(4.50), og de benyttes først og fremmest til at vurdere ligevægts- og stabilitetsforhold for fusionsplasmaer, der holdes indesluttet i toroidale magnetfeltkonfigurationer. Man er derfor ikke interesseret i højfrekvente svingninger med $\omega > \omega_{pe}$ eller i kortbølgede svingninger med $\lambda < d$. Disse fænomener elimineres fra ligningssystemet (4.48) til (4.51) ved at antage, at ionerne repræsenterer de eneste massebærere i plasmaet, altså ved at lade $m_e \to 0$ og ved at antage ladningsneutralitet $n_e = n_i = n$.

Udledelse af enkelt-fluidligningerne

Som første skridt på vejen mod ligningerne for ideal magnetohydrodynamik udledes enkelt-fluidligningerne ud fra ligningssystemet (4.48)-(4.51) ved at indføre ny størrelser, der beskriver plasmaet som ét legeme. Idet tilnærmelserne $m_e \to 0$ og $n_i = n_e = n$ benyttes, udtrykkes massetætheden i enkelt-fluidbeskrivelsen ved

$$\rho(\mathbf{r},t) = m_i\, n(\mathbf{r},t) \,. \tag{4.53}$$

Massetæthed

For massestrømningshastigheden fås i samme tilnærmelse

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) \equiv \frac{n_e m_e \mathbf{u}_e + n_i m_i \mathbf{u}_i}{n_e m_e + n_i m_i} = \mathbf{u}_i(\mathbf{r},t) \,, \tag{4.54}$$

Strømningshastighed

og strømtætheden i plasmaet bliver

$$\mathbf{j}(\mathbf{r},t) = en(\mathbf{r},t)\{\mathbf{u}_i(\mathbf{r},t) - \mathbf{u}_e(\mathbf{r},t)\} \ . \qquad (4.55)$$

Strømtæthed

Endelig indføres for det samlede statiske tryk

$$p(\mathbf{r},t) = p_e(\mathbf{r},t) + p_i(\mathbf{r},t) = n\kappa(T_e + T_i) \ . \qquad (4.56)$$

Statisk tryk

Ligningerne (4.53)-(4.56) sammenknytter de variable ρ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{j}$ og p i enkelt-fluidbeskrivelsen med to-fluidbeskrivelsens variable n, $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{u}_e$, p_i og p_e.

Indsættes (4.53)-(4.56) i (4.48)-(4.50), findes efter nogen regning

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho\mathbf{u} = 0 \ , \qquad (4.57)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \ , \qquad (4.58)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \nabla p = -\nabla \cdot \left[\underline{\underline{\Pi}}_i + \underline{\underline{\Pi}}_e\right] \ , \qquad (4.59)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = (ne)^{-1}(\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e - \nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}_e + \mathbf{R}_e) \qquad (4.60)$$

samt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_i}{\rho^\gamma}\right) = \frac{2}{3\rho^\gamma}(Q_i - \nabla \cdot \mathbf{h}_i - \underline{\underline{\Pi}}_i : \nabla \mathbf{u})$$

Enkelt-fluid-ligningerne

og

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_e}{\rho^\gamma}\right) = \frac{2}{3\rho^\gamma}\left(Q_e - \nabla \cdot \mathbf{h}_e - \underline{\underline{\Pi}}_e : \nabla\left\{\mathbf{u}\frac{\mathbf{j}}{en}\right\}\right)$$

$$+ \frac{1}{en}\mathbf{j} \cdot \nabla\left(\frac{p_e}{\rho^\gamma}\right) \ . \qquad (4.61)$$

γ er det adiabatiske forhold, C_p/C_v, der for mono-atomiske gasser antager værdien 5/3. Endelig tager Maxwell-ligningerne formen

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,, \tag{4.62}$$

Maxwell-ligningerne i enkelt-fluid-tilnærmelsen

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j}\,, \tag{4.63}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0\,. \tag{4.64}$$

Desuden medfører antagelsen $n_i = n_e$, at $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$.

For ligningssystemet gælder analogt med (4.47)

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\,. \tag{4.65}$$

Enkelt-fluidligningernes fortolkning

Enkelt-fluidligningssystemet (4.57)-(4.65) er helt ækvivalent med to-fluid-systemet (4.48)-(4.51) i den asymptotiske grænse $m_e \to 0$ og $n_e = n_i = n$. Ledene på højre side af (4.59)-(4.61) indeholder bl.a. de ubestemte højere momenter. Ideal MHD er karakteriseret ved, at disse led negligeres. For en dybtgående diskussion af de plasmafysiske situationer, hvor det er en god tilnærmelse at negligere disse led, henvises til andre arbejder, f.eks. [10], [12] og [13]. Her skal kun gives nogle generelle bemærkninger, der også tilstræber at give fysiske fortolkninger af de enkelte ligninger.

Massekontinuitetsligningen

Ligning (4.57) er en kontinuitetsligning for plasmaets masse. Den siger blot, at den tidsafledede af massetætheden er bestemt ved divergensen af massestrømmen, altså at masse ikke dannes eller forsvinder.

Ladningskontinuitetsligningen

Ligning (4.58) er tilsvarende en kontinuitetsligning for plasmaets ladningsbærere. Da vi antager $n_e = n_i$, er rumladningstætheden altid lig nul, hvorfor $\nabla \cdot \mathbf{j}$ nødvendigvis også må være lig nul. Bemærk desuden, at (4.58) faktisk er overflødig, fordi den er indeholdt i Maxwell-ligningen (4.63), da der som bekendt gælder identiteten $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{B} \equiv 0$.

Kraftligningen

Ligning (4.59) er klart en kraftligning for plasmaet svarende til Newtons anden lov, hvilket lettest ses ved at gange ligningen igennem med det differentielle rumelement $d^3\mathbf{r} = dxdydz$. Første led på venstre side beskriver da massen af et rumelement i plasmaet gange dette rumelements acceleration. De øvrige led må derfor opfattes som forskellige kræfter, der påvirker dette rumelement og derved tilfører det impuls. $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ er Lorentzkraften, der skyldes vekselvirkningen mellem plasmastrømtætheden $\mathbf{j}$ og det magnetiske felt $\mathbf{B}$. ∇p-ledet beskriver den resulterende kraft på rumelementet, som følger af rumlige variationer i plasmatrykket. Dette trykled skal her diskuteres lidt nærmere, da diskussionen vil føre til lettere forståelse af ledet på højre side af (4.59).

∇p-ledet

Som vist ved udledningen i Appendiks 1 af formlen (A1.11) for trykket mod en væg, der vender ind mod en gas, skyldes trykket på væggen, at de partikler, der rammer den, reflekteres og derved får en impulsændring, mens væggen får en lige så stor impulspåvirkning i modsat retning. En partikel af

typen α, der bevæger sig med hastigheden, v_i, mod væggen og efter stødet bevæger sig bort med hastigheden, v_u, (negativ) har i stødet påvirket væggen med impulsen $m_\alpha(v_i - v_u)$. (Da partiklen jo støder mod en termisk partikel i væggen, vil der generelt **ikke** gælde, at $v_u = -v_i$). Antallet af partikler med hastigheder fra v_i til $v_i + dv_i$, der i tidsrummet $\Delta\tau$ vil ramme en arealenhed af væggen og dermed afgive deres impuls, mv_i, er givet ved $v_i \Delta\tau f_\alpha(v_i)dv_i$. Tilsvarende er antallet af partikler i hastighedsintervallet v_u til $v_u + dv_u$, der har vekselvirket i tidsrummet $\Delta\tau$ og via reaktion tilført vægarealenheden den positive impulsmængde, $-m_\alpha v_u$ pr. partikel, givet ved $|v_u|\Delta\tau f_\alpha(v_u)dv_u$.

Det totale tryk mod en væg, der står vinkelret på f.eks. $\hat{\mathbf{x}}$-retningen er da givet ved:

$$P_{\alpha,tot,x} = \int_0^\infty m_\alpha v_x^2 f_\alpha(v_x)dv_x + \int_{-\infty}^0 -m_\alpha v_x \mid v_x \mid f_\alpha(v_x)dv_x$$

$$= \int_{-\infty}^\infty m_\alpha v_x^2 f_\alpha(v_x)dv_x \ , \ * \qquad (4.66)$$

og analogt for $\hat{\mathbf{y}}$- og $\hat{\mathbf{z}}$-retningerne. Hvis væggen er i ro i forhold til gassen og i termisk ligevægt med denne, vil hastighedsfordelingen af de reflekterede partikler være identisk med de indkommendes fordeling ($f(-v_x) = f(v_x)$), og (4.66) kan da reduceres til et integral fra 0 til ∞ som i (A1.11), og den beskriver så det statiske tryk. (4.66) er udtryk for en mere generel situation, hvor det tillades, at væggen forårsager asymmetri i fordelingsfunktionen.

Det gælder generelt for en gas, hvor vi ikke antager isotropi, dvs. hvor hastighedsfordelingen er retningsafhængig, at trykket mod en væg afhænger af dens orientering.

For det totale tryk i en given retning $\hat{\mathbf{r}}$ har vi da udtrykket

$$p_{\alpha,tot,r} = \int m_\alpha v_r^2 f_\alpha(\mathbf{v})d^3\mathbf{v} \ . \qquad (4.67)$$

Ser vi nu på et legeme, der bevæger sig med fluidhastigheden $\mathbf{u}_\alpha$, er det den tilfældige bevægelse, $\mathbf{v}'$, der giver anledning til et (evt. retningsafhængigt) statisk tryk, $p_{\alpha r}$, imod legemet, (se (4.38)).

$$p_{\alpha r} = \int m_\alpha v_r'^2 f_\alpha(\mathbf{v}')d^3\mathbf{v}' \ . \qquad (4.68)$$

---

*For en omtale af den én-dimensionale fordelingsfunktion, se evt. Appendiks 1.1, Figur A1.3.

Bemærk i øvrigt, at det skalære statiske tryk, p_α, defineret i (4.41) kan udtrykkes som

$$p_\alpha = \frac{1}{3}(p_{\alpha x} + p_{\alpha y} + p_{\alpha z}) , \tag{4.69}$$

hvor $p_{\alpha x}$, $p_{\alpha y}$, $p_{\alpha z}$ er det statiske tryk i hhv. $\hat{\mathbf{x}}$-, $\hat{\mathbf{y}}$- og $\hat{\mathbf{z}}$-retningen, som er givet ved (4.68), når r står for hhv. x, y og z.

På de foregående sider har vi diskuteret trykket mod en materiel væg, der er i kontakt med en gas. Vi vil betragte et rumelement i et plasma, som skitseret på Fig. 4.3. Elementet bevæger sig med fluidhastigheden $\mathbf{u}_\alpha$. Elementet har ikke materielle vægge, der reflekterer de indkommende partikler, men vi vil nu vise, at påvirkningen af elementet fra partiklernes tilfældige bevægelse, v', alligevel er givet ved en trykpåvirkning af formen (4.68).

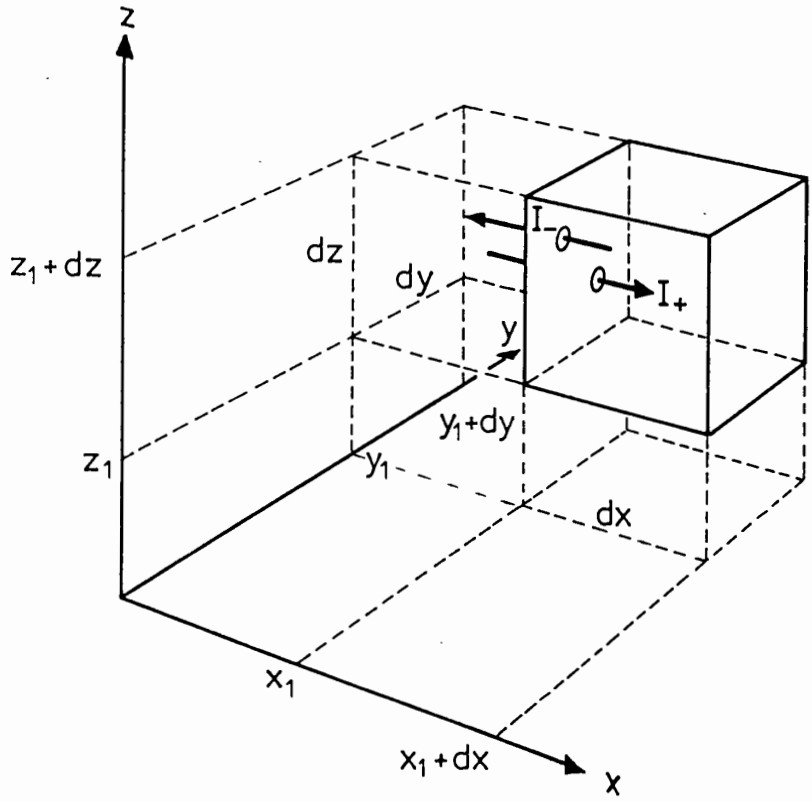

Fig. 4.3. Impulsudvekslingen for et rumelement i et plasma.

Vi ser på det differentielle arealelement dydz, som ved x_1 står vinkelret på $\hat{\mathbf{x}}$-retningen. De partikler, der passerer dette areal i positiv retning (ved positiv menes i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen), tilfører rumelementet en positiv impulsmængde i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen pr. tidsenhed

$$\dot{I}_{\alpha+} = dydz \int_0^\infty m_\alpha v_x'^2 f_\alpha(v_x') dv_x' . \tag{4.70}$$

De partikler, der fra rumelementet bevæger sig i negativ retning ud gennem arealelementet forårsager tilsvarende, at rumelementet taber en negativ impulsmængde i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen pr. tidsenhed

$$\dot{I}_{\alpha-} = dydz \int_{-\infty}^{0} m_\alpha v_x'^2 f_\alpha(v_x') dv_x' \,. \tag{4.71}$$

Resultatet bliver, at rumelementet gennem arealelementet får tilført en positiv impulsmængde pr. tidsenhed,

$$\dot{I}_\alpha = \dot{I}_{\alpha+} - \dot{I}_{\alpha-} = dydz \int_{-\infty}^{\infty} m_\alpha v_x'^2 f_\alpha(v_x') dv_x' \,. \tag{4.72}$$

Kraften, $\dot{I}_\alpha$, som rumelementet påvirkes af ved parallelimpulsudveksling* gennem arealelementet, dydz, svarer til, at rumelementet på overfladen ved x_1 er udsat for et tryk $p_{\alpha x}$ givet ved

$$p_{\alpha x} = \int_{-\infty}^{\infty} m_\alpha v_x'^2 f_\alpha(v_x') dv_x' \,, \tag{4.73}$$

som er identisk med det tryk mod en materiel væg, som ydes af en gas, hvor hastighedsfordelingen er givet ved $f_\alpha(v_x')$,se (4.68). Vi har altså

$$\dot{I}_\alpha = dydz\, p_{\alpha x} \,. \tag{4.74}$$

Tilsvarende påvirkes rumelementet gennem arealelementet ved $x_1 + dx$ af en kraft i negativ retning, således at den samlede trykkraftpåvirkning på rumelementet i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen bliver

$$\begin{aligned} K_{\alpha x} &= dydz(p_{\alpha x}(x_1) - p_{\alpha x}(x_1 + dx)) \\ &= dydz\left(-\frac{\partial p_{\alpha x}}{\partial x}\right) dx \\ &= -\frac{\partial p_{\alpha x}}{\partial x} d^3\mathbf{r} \,. \end{aligned} \tag{4.75}$$

---

* "Parallel" refererer til, at vi kun betragter den del af impulsen, der er parallel med transportretningen, her med $\hat{\mathbf{x}}$-retningen.

For den parallelle impulsudveksling i $\hat{\mathbf{y}}$- og $\hat{\mathbf{z}}$-retningerne findes analoge kraftudtryk, således at den samlede kraftpåvirkning af rumelementet ved parallelimpulsudveksling bliver

$$\mathbf{K}_\alpha = \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial x} p_{\alpha x} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(-\frac{\partial}{\partial y} p_{\alpha y} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(-\frac{\partial}{\partial z} p_{\alpha z} \right) \hat{z} \right\} d^3\mathbf{r} \, . \tag{4.76}$$

Det skalære tryk, p_α, defineret i (4.41), er som allerede nævnt i forbindelse med (4.69) blot gennemsnittet af trykkene i $\hat{\mathbf{x}}$-, $\hat{\mathbf{y}}$- og $\hat{\mathbf{z}}$-retningerne. Ved at indføre det skalære tryk samt forskellene mellem de retningsafhængige tryk og det skalære tryk, $\Pi_{\alpha xx} = p_{\alpha x} - p_\alpha$, + 2 analoge, kan (4.76) omskrives til formen, se (4.42)

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\alpha &= -\nabla p_\alpha \, d^3\mathbf{r} + \left\{ \left(-\frac{\partial}{\partial x} \Pi_{\alpha xx} \right) \hat{x} + \left(-\frac{\partial}{\partial y} \Pi_{\alpha yy} \right) \hat{y} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{\partial}{\partial z} \Pi_{\alpha zz} \right) \hat{z} \right\} d^3\mathbf{r} \\ &= -\nabla p_\alpha \, d^3\mathbf{r} - \nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}_{\alpha,diagonal} \, d^3\mathbf{r} \, , \end{aligned} \tag{4.77}$$

hvor $\underline{\underline{\Pi}}_{\alpha,\text{diagonal}}$ er en tensor bestående af $\underline{\underline{\Pi}}_{\alpha xx,yy,zz}$ i diagonalen og intet udenfor. ∇p_α -ledet er blot den sædvanlige kraftpåvirkning på et legeme i et skalært trykfelt, mens $\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}_{\alpha,\text{diagonal}}$ angiver afvigelsen fra denne kraft på grund af en eventuel retningsafhængighed af trykket (anisotropt tryk). Af (4.40) til (4.42) fremgår, at $\underline{\underline{\Pi}}_{\alpha,\text{diagonal}}$ netop er diagonalen af den anisotrope tryktensor $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$.

Som allerede nævnt, opnås ligningerne for ideal MHD ved at negligere ledene på højre side af (4.59)-(4.61); altså ved også at negligere $\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}_\alpha$-ledet i (4.59) og dermed $\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}_{\alpha,\text{diagonal}}$-ledet i (4.77). Da det er af betydning for en vurdering af ideal MHD's gyldighedsområde at vide, under hvilke omstændigheder $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$'s led er små (f.eks. i sammenligning med p_α), ser vi nu nærmere på hvilken form for anisotropi i fordelingsfunktionen, der er nødvendig for at opnå $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$-led, der er forskellige fra nul.

Vi ser først på diagonalledene i $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$ som indgår i (4.77). Af (4.73) fremgår, at trykket i én retning er proportional med den kinetiske energitæthed, der skyldes partiklernes termiske bevægelse i denne retning. Heraf følger umiddelbart, at diagonalledene skyldes forskelle i den kinetiske energitæthed i de forskellige retninger. Er energitætheden i de forskellige retninger den samme, forsvinder diagonalledene. Fordelingsfunktionen kan dog stadig være særdeles anisotrop, idet kravet til energitætheden ikke er særlig restriktivt på fordelingsfunktionen.

Vi vil nu se på ledene uden for diagonalen i $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$-tensoren. De hidrører fra vinkelret impulsudveksling, dvs. den del af impulsen, der står vinkelret på transportretningen. Lad os f.eks. se på det første led i midterste søjle, $p_{\alpha xy}$, som iflg. (4.40) er defineret ved

$$p_{\alpha xy} = n_\alpha m_\alpha \langle v_x' v_y' \rangle_\alpha = \int v_x' f_\alpha(\mathbf{v}') m_\alpha v_y' d^3\mathbf{v}' \,. \tag{4.78}$$

$p_{\alpha xy}$ beskriver den ændring i rumelementets impuls i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen, som bæres af partikler, der strømmer ind i eller ud af rumelementet på grund af deres bevægelse i $\hat{\mathbf{x}}$ -retningen. Det fremgår af (4.78), at tryktensoren er symmetrisk, hvilket betyder, at rumelementets impulsændring i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen p.g.a. partikelbevægelse i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen er lig impulsændringen i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen p.g.a. partikelbevægelse i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen.

Antallet af partikler med hastigheden $\mathbf{v}' = v_x'\hat{\mathbf{x}} + v_y'\hat{\mathbf{y}}$, der pr. tidsenhed strømmer gennem fladeelementet dydz ved x_1 i Fig. 4.3, er proportional med v_x' dydz. For $v_x' > 0$ strømmer de ind i rumelementet, og for $v_x' < 0$ strømmer de ud af elementet. Disse partikler medfører en impuls i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen på $m_\alpha v_y'$, hvilket giver rumelementet en impulspåvirkning i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen pr. tidsenhed på $v_x'(m_\alpha v_y')$dydz. Virkningen af samtlige partikler i fordelingen er da givet ved

$$\dot{I}_{\alpha xy} = dydz \int v_x' m_\alpha v_y' f_\alpha(\mathbf{v}') d^3\mathbf{v}' = dydz\, p_{\alpha xy} \,. \tag{4.79}$$

Tilsvarende påvirkes rumelementet i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen af partikler, der strømmer gennem fladeelementet dydz ved $x_1 + dx$, således at den samlede kraftpåvirkning af rumelementet i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen på grund af strømning i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen bliver

$$\begin{aligned} K_{\alpha xy} &= dydz(p_{\alpha xy}(x_1) - p_{\alpha xy}(x_1 + dx)) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}(p_{\alpha xy}) d^3\mathbf{r} \,. \end{aligned} \tag{4.80}$$

Transport af impuls i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen ved partikelstrømning i de øvrige retninger (inklusive $\hat{\mathbf{y}}$-retningen) behandles analogt. Vi inkluderer her den parallelle impulsudveksling og får således de tidligere behandlede led med. For den samlede kraftpåvirkning i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen fås umiddelbart

$$K_{\alpha \mathbf{r} y} = -\nabla \cdot \mathbf{p}_{\alpha \mathbf{r} y}\, d^3\mathbf{r} \,. \tag{4.81}$$

Kraftpåvirkningen i de to andre retninger findes på tilsvarende måde, hvorefter den samlede kraftpåvirkning på rumelementet kan skrives

$$\mathbf{K}_{\alpha\mathbf{rr}} = -\nabla\cdot \underline{\underline{p}}_{\alpha\mathbf{rr}}\, d^3\mathbf{r}$$

$$= -(\nabla p_\alpha + \nabla\cdot \underline{\underline{\Pi}}_\alpha) d^3\mathbf{r}\,. \qquad (4.82)$$

I den sidste linie i (4.82) er den isotrope del af tryktensoren skilt ud fra den anisotrope del, jvf. (4.42).

Partikler, der passerer gennem fladelementet ved $\mathbf{x}_1$, kan altså ændre rumelementets impuls i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen, men kun hvis hastighedsfordelingsfunktionen er anisotrop. Er den isotrop, vil impulstilførslen fra partikler med hastigheden $\mathbf{v}' = \mathrm{v}_x'\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{v}_y'\hat{\mathbf{y}}$ nemlig kompenseres af den impuls, der fjernes af partikler med hastigheden $\mathbf{v}^* = \mathrm{v}_x'\hat{\mathbf{x}} + \mathrm{v}_y'\hat{\mathbf{y}}$.

Efter at have diskuteret den fysiske fortolkning af ledende uden for diagonalen i $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$ skal vi nu vurdere den tilnærmelse, der består i at se bort fra disse led. I stedet for at diskutere disse leds størrelse i forhold til p_α betaler det sig at benytte nogle kendte resultater fra den matematiske analyse af symmetriske tensorer. (Se f.eks. en diskussion af et vilkårligt legemes inertitensor i rationel mekanik).

Det er allerede nævnt under diskussionen af (4.78), at tryktensoren $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$ er symmetrisk. Det fremgår desuden af (4.42) og (4.69), at summen af $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$'s diagonalled er nul.

Fra den elementære lineære algebra er det kendt, at en symmetrisk tensor som

$$\underline{\underline{T}} = \begin{Bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{Bmatrix} \qquad (4.83)$$

ved en passende drejning af koordinatsystemet kan føres over i en diagonaltensor som

$$\underline{\underline{D}} = \begin{Bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Bmatrix}, \qquad (4.84)$$

hvor $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = A_{11} + A_{22} + A_{33}$.

Koordinatretningerne i det nye system kaldes tensorens principale retninger.

Det betyder, at en passende drejning af koordinatsystemet vil føre $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$ over i en diagonaltensor $\underline{\underline{\Pi}}'_\alpha$, hvor alle led uden for diagonalen er nul, og hvor summen af diagonalledene stadig er nul. Diagonalledene i $\underline{\underline{\Pi}}'_\alpha$ beskriver afvigelserne fra det isotrope middeltryk p_α, givet ved (4.41), i de tre principale retninger. I det koordinatsystem, der har disse retninger som koordinatakser, er summen af de numeriske værdier af $\underline{\underline{\Pi}}'_\alpha$'s diagonalled størst. At alle led uden for diagonalen i $\underline{\underline{\Pi}}'_\alpha$ er nul, betyder, at transport af partikler i én principal retning ikke medfører impulsændringer i nogen af de to vinkelrette principale retninger. Det er vigtigt her af bemærke, at selv om ledene uden for diagonalen i $\underline{\underline{\Pi}}'_\alpha$ er nul, så er disse leds rumligt afledede ikke nødvendigvis nul. Når man som i (4.59) skal differentiere denne tensor, kan der derfor også komme bidrag fra ledene uden for diagonalen.

Af ovenstående kan sluttes, at hvis afvigelserne fra et isotropt tryk ikke er for store, vil det være en god tilnærmelse at se bort fra $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$-ledene. Det skal igen nævnes, at der godt kan være store afvigelser fra isotropi i fordelingsfunktionen, uden at trykket behøver at være anisotropt.

Generaliseret Ohms lov

Ligning (4.60) kaldes ofte den generaliserede Ohms lov, fordi den sammenknytter det elektriske felt med andre variable størrelser som **u**, **j**, p o.a. De enkelte led er lette at fortolke. $\mathbf{u}\times\mathbf{B}$ er den spænding, der induceres, når plasmaet bevæger sig vinkelret på magnetfeltlinierne. Første led på højre side, $\mathbf{j}\times\mathbf{B}$-ledet, beskriver den spænding, der induceres ved Hall-effekt, når der i et legeme løber en strøm, som udelukkende bæres af elektronerne, med en komponent vinkelret på magnetfeltet. Det andet led på højre side af (4.60), ∇p_e-ledet, er også let at give en fysisk fortolkning. Hvis man tænker sig, at der i et plasma er dannet en positiv rumlig tæthedsperturbation, så vil den være holdt sammen af ionernes inerti inden for en tidsskala givet ved perturbationens størrelse divideret med den karakteristiske termiske hastighed for ionerne. Elektronerne i perturbationen, der har en karakteristisk termisk hastighed, der er $(T_e m_i/T_i m_e)^{1/2}$ gange større end ionernes, vil have tendens til at strømme væk inden for en tilsvarende mindre tidsskala. Set fra elektronernes tidsskala er perturbationen derfor stationær. Da $n_i \simeq n_e$ skal opretholdes, må der opstå en kraft, der påvirker elektronerne ind mod perturbationen. Det er en elektrisk kraft, der påvirker elektroner. Der opstår et elektrisk felt, ved

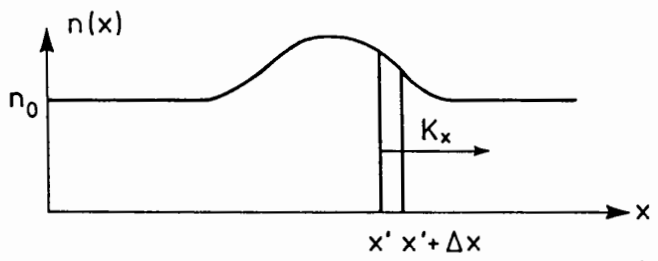

Fig. 4.4. Elektriske felter omkring tæthedsperturbationer i et plasma.

at en ganske lille del af elektronerne forlader perturbationen, derved får perturbationen en positiv rumladningstæthed, som, pga. $\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$ = rumladningstætheden, genererer et elektrisk felt, der er rettet bort fra perturbationen. Dette felt holder elektronerne tilbage i perturbationen. I det én-dimensionelle tilfælde, vist på Fig. 4.4, er det let at beregne det elektriske felt, der er nødvendigt for at holde elektronerne tilbage. Elektronerne i en arealenhed af laget mellem x' og x' + Δx påvirkes af en resulterende kraft, der skyldes gradienten i elektrontrykket, og som er givet ved

$$K_x = -\Delta x \frac{\partial(n\kappa T_e)}{\partial x} . \tag{4.85}$$

Skal elektronlaget holdes på plads af en elektrisk kraft, må det elektriske felt være givet ved $\Delta x n e E_x = K_x$, eller

$$E_x = -\frac{1}{ne} \frac{\partial(n\kappa T_e)}{\partial x} , \tag{4.86}$$

hvilket svarer helt til bidraget fra ∇p_e-ledet i den tre-dimensionale (4.60)-ligning. Bemærk, at ovenstående diskussion af ∇p_e-ledet er meget analog til diskussionen af Debye-længden i underafsnit 2.3.2.

Det tredie led, $\nabla \cdot \underline{\underline{\Pi}}_e$-ledet, i (4.60) giver et bidrag til den netop diskuterede effekt, som svarer helt til diskussionen af $\underline{\underline{\Pi}}$-ledene i (4.59). Endelig er det sidste led på højre side af (4.60) et bidrag, der beskriver spændingsfaldet over plasmaets Ohmske modstand. For yderligere diskussion af et plasmas modstand henvises til underafsnit 6.2.2.

De adiabatiske ligninger

De to ligninger (4.61) kaldes ofte de adiabatiske ligninger. Venstre siderne alene udgør de fra termodynamikken kendte adiabatiske ligninger, der sammenknytter tryk- og rumfangsændringer for en gas, der ikke vekselvirker energimæssigt med omgivelserne. Ledene på højre side beskriver plasmapartiklernes energivekselvirkninger med omgivelserne. Første led på højre side, Q_α, beskriver den varmeeffekt, der produceres ved stød mellem partikler af typen α med partikler af typen β, se (4.46). Andet led, $\nabla \cdot \mathbf{h}_\alpha$, beskriver den varmefluks, båret af α-type partikler, som plasmaelementet er udsat for. Endelig beskriver de sidste led på højre side af (4.61) den varmeeffekt, der skyldes anisotropi i trykkene.

Ideal MHD's gyldighedsområde

Som nævnt er ideal magnetohydrodynamik karakteriseret ved, at ledene på højre side af ligningssystemet (4.59) - (4.61) negligeres. Gyldighedsområdet for ideal magnetohydrodynamik er derfor begrænset til det parameterområde, hvor disse led faktisk er små. En analyse (se f.eks. [10], [12] eller [13]) viser, at ligningerne for ideal MHD er gyldige for plasmaer, hvori der sker så mange stød, at $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$-ledene holdes små på grund af støds tendens til at etablere isotrope fordelingsfunktioner. På den anden side må stødfrekvensen ikke være for stor, fordi det ville medføre, at R_e-ledet i (4.60), der jo beskriver plasmaets

Ohmske modstand, ville få betydning. Det viser sig, at gyldighedsområdet for ideal MHD afhænger af plasmaets fysiske størrelse og af forholdet β mellem plasmatrykket, $n\kappa T$, og magnetfelttrykket, $B^2/2\mu_0$, samt af temperaturen og tætheden. På Fig. 4.5 er ideal MHD's gyldighedsområde tegnet ind i et (n,T)-diagram for et plasma med en karakteristisk dimension på 1 m og med en

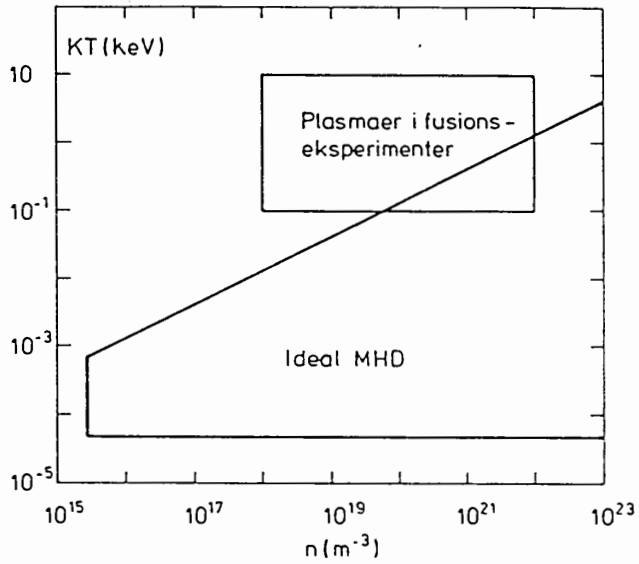

Fig. 4.5. Gyldighedsområde for ideal MHD. Plasmaets beta-værdi = 5%, dets karakteristiske lineære dimension = 1 m.

β-værdi på 5%. Det er vist i kapitel 2, at jo varmere et plasma er, desto lavere bliver stødfrekvensen. Over den skrå linie, der begrænser ideal MHD-området, er stød så sjældne begivenheder, at isotropi ikke kan forventes opretholdt (se diskussionen af (4.59) ovenfor). Under den vandrette grænse for MHD-området sker der på den anden side så mange stød, at modstanden, dvs. $\mathbf{R}_c$-ledet i (4.60), bliver væsentligt. Endelig må det være et krav, at ionernes gyroradier er meget mindre end plasmaets dimensioner, hvilket med de valgte parameterværdier: plasmadimension = 1 m og β = 0.05 fører til, at ideal MHD kun er gyldig til højre for den lodrette linie.

Som det fremgår af Fig. 4.5, ligger plasmaerne i fusionseksperimenter på grænsen af ideal MHD's forventede gyldighedsområde. I praksis har ideal MHD imidlertid vist sig at være en god beskrivelse også af de varme fusionsplasmaer. Det kan som nævnt skyldes, at vurderingen af gyldighedsområdet, der jo antager opretholdelse af isotropiske fordelingsfunktioner, har været for pessimistisk.

I næste kapitel vil vi ud fra ligningerne for ideal MHD diskutere ligevægts forhold for plasmaer i toroidale konfigurationer, der studeres inden for fusionsforskningen. Ligningerne for ideal MHD fås som nævnt ud fra lignings-systemet (4.57) - (4.64) ved at negligere højre siderne i (4.59) - (4.61), så det samlede system, bliver efter simple omformeringer

Ligninger for ideal MHD

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla\cdot\mathbf{u}\,, \tag{4.87}$$

$$\rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{j}\times\mathbf{B} - \nabla p\,, \tag{4.88}$$

$$\frac{dp}{dt} = -\gamma p\nabla\cdot\mathbf{u}\,, \tag{4.89}$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \nabla\times(\mathbf{u}\times\mathbf{B})\,, \tag{4.90}$$

$$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_o\mathbf{j} \tag{4.91}$$

samt

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0\,. \tag{4.92}$$

5. TOROIDALE SYSTEMERS LIGEVÆGT OG STABILITET BEHANDLET I IDEAL MHD

I dette kapitel omtales først nogle generelle egenskaber for magnetiserede plasmaer, der beskrives ved ideal MHD. Derefter diskuteres toroidale systemers ligevægt. En teoretisk behandling af muligheden for at holde et plasma indesluttet i en magnetfeltkonfiguration består af to dele. Først undersøges om plasmaet er i ligevægt, dvs. om summen af de kræfter, der påvirker hvert enkelt plasmaelement, er nul. Når det er konstateret, at plasmaet er i en ligevægtssituation, undersøges, om det er stabilt, dvs. om plasmaet, hvis det udsættes for små perturbationer, af sig selv vil bevæge sig tilbage til ligevægtsituationen. Kun hvis der både er ligevægt og stabilitet, kan man opnå den gode indeslutning af plasmaet, som er nødvendig for en fusionsreaktor. Der er dog mulighed for, at Lawson-kriteriet vil kunne opfyldes, selv om plasmaet ikke er stabilt, hvis blot instabiliteten vokser tilstrækkelig langsomt. Problemerne om ligevægt og stabilitet er illustreret på Fig. 5.1. a) viser et system -

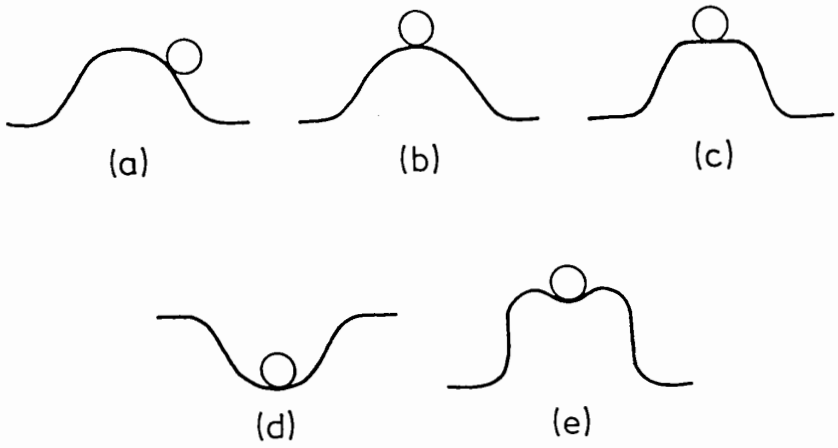

Fig. 5.1. Eksempler på ligevægt og stabilitet.

en bold på en høj - der ikke er i ligevægt, og som dermed også er ustabilt. I b) er systemet i ligevægt, men da en lille forskydning vil bevirke, at bolden vil trille ned, er det ikke stabilt. I c), hvor bolden ligger på et vandret plateau, er der ligevægt og også marginal stabilitet. Endelig viser d) en situation med både ligevægt og stabilitet. I de fleste plasmaeksperimenter opnås kun en situation, der svarer til e), hvor der både er ligevægt og stabilitet, men hvor stabiliteten kun holder for tilstrækkelig små perturbationer.

Som nævnt diskuteres i dette kapitel ligevægt for toroidale konfigurationer ud fra den ideale MHD. En egentlig diskussion af konfigurationernes stabilitet er uden for denne bogs omfang; det vil dog ved et par eksempler blive vist, hvorledes stabilitetsundersøgelser kan gennemføres.

5.1. Generelle Egenskaber ved Ideal MHD

5.1.1. Bevarelse af magnetisk flux

Fluxbevarelse

Lad os betragte et plasma, der bevæger sig i et tidsvarierende magnetfelt. Vi lægger en lukket kurve ind i plasmaet og lader denne kurve definere en begrænset flade, for hvilken den er grænsekurve, se Fig. 5.2. Vi tænker os, at de enkelte elementer af grænsekurven følger med den lokale plasmabevægelse, altså bevæger sig med den lokale fluidhastighed **u**. Vi vil nu vise ved hjælp

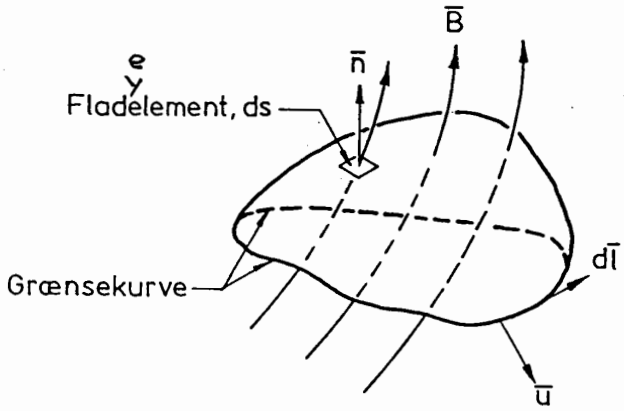

Fig. 5.2. Plasma og magnetfeltlinier følges ad i en samlet bevægelse, de er "frosset" sammen.

af ligningerne for ideal MHD, at den magnetiske flux gennem fladen holder sig konstant. Vi bemærker først, at den magnetiske flux er lige stor gennem alle flader, der har kurven til grænsekurve. Det vises let ved et indirekte bevis. Antag, at den magnetiske flux er forskellig gennem to flader, der begge har kurven som grænsekurve. Det medfører, at der i det legeme, der begrænses af de to flader, forsvinder eller dannes magnetfeltlinier. Da det vil være i modstrid med Maxwell-loven $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, kan det sluttes, at den magnetiske flux gennem alle flader med samme grænsekurve er ens. Den magnetiske flux gennem en flade er

$$\psi = \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}s \,, \tag{5.1}$$

hvor ds er et infinitesimalt fladeelement. **n** er en enhedsvektor, der står vinkelret på fladen, og **B** er det magnetiske felt ved fladeelementet. Integrationen skal foretages over hele fladen.

Af (5.1) findes

$$\frac{d\psi}{dt} = \int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} ds - \int \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} , \tag{5.2}$$

hvor dl er et infinitesimalt vektorielt længdeelement af grænsekurven, hvis positive retning fremgår af Fig. 5.2. Integrationen af sidste led i (5.2) løber en gang rundt langs grænsekurven. Indsættes ligningen fra ideal MHD (4.90) i (5.2) findes

$$\frac{d\psi}{dt} = \int \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} ds - \int \mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} . \tag{5.3}$$

Ifølge Stokes sætning er de to led på højre side lige store, dvs.

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 . \tag{5.4}$$

(5.4) er udledt for en vilkårlig grænsekurve i et plasma, dvs. den gælder generelt og betyder f.eks., at den totale magnetiske flux gennem ethvert plasma, der beskrives ved ideal MHD, holdes konstant. Ofte udtrykker man den kendsgerning, at fluxen gennem et plasmaelement holder sig konstant, ved at sige, at plasmaet er "frosset" fast til magnetfeltlinierne.

Det er kun den ideale MHD, der fører til, at den magnetiske flux holder sig konstant. I den ideale MHD forudsættes jo, at den elektriske modstand i plasmaet er nul. Hvis der tillades en endelig, men lille modstand, vil man finde, at den magnetiske flux i et plasma kan ændre sig langsomt. Her er situationen analog med den begrænsede indtrængningsdybde for tidsvarierende elektromagnetiske signaler i metaller med lille specifik modstand. Jo mindre modstand, des mindre indtrængningsdybde og des mindre ændring i fluxen.

5.1.2. Plasmas diamagnetisme i simpel én-dimensional geometri

Diamagnetisme

I dette afsnit vil det blive vist, at et magnetiseret plasma virker diamagnetisk. Et plasmas diamagnetisme er allerede berørt i underafsnit 3.3.1. Vi vil her diskutere de generelle fysiske forhold, der betinger denne diamagnetisme, og vi vil derfor kun betragte den simplest mulige geometri med rette magnetfeltlinier, hvor fysikken er mest overskuelig. I senere afsnit vil vi behandle mere

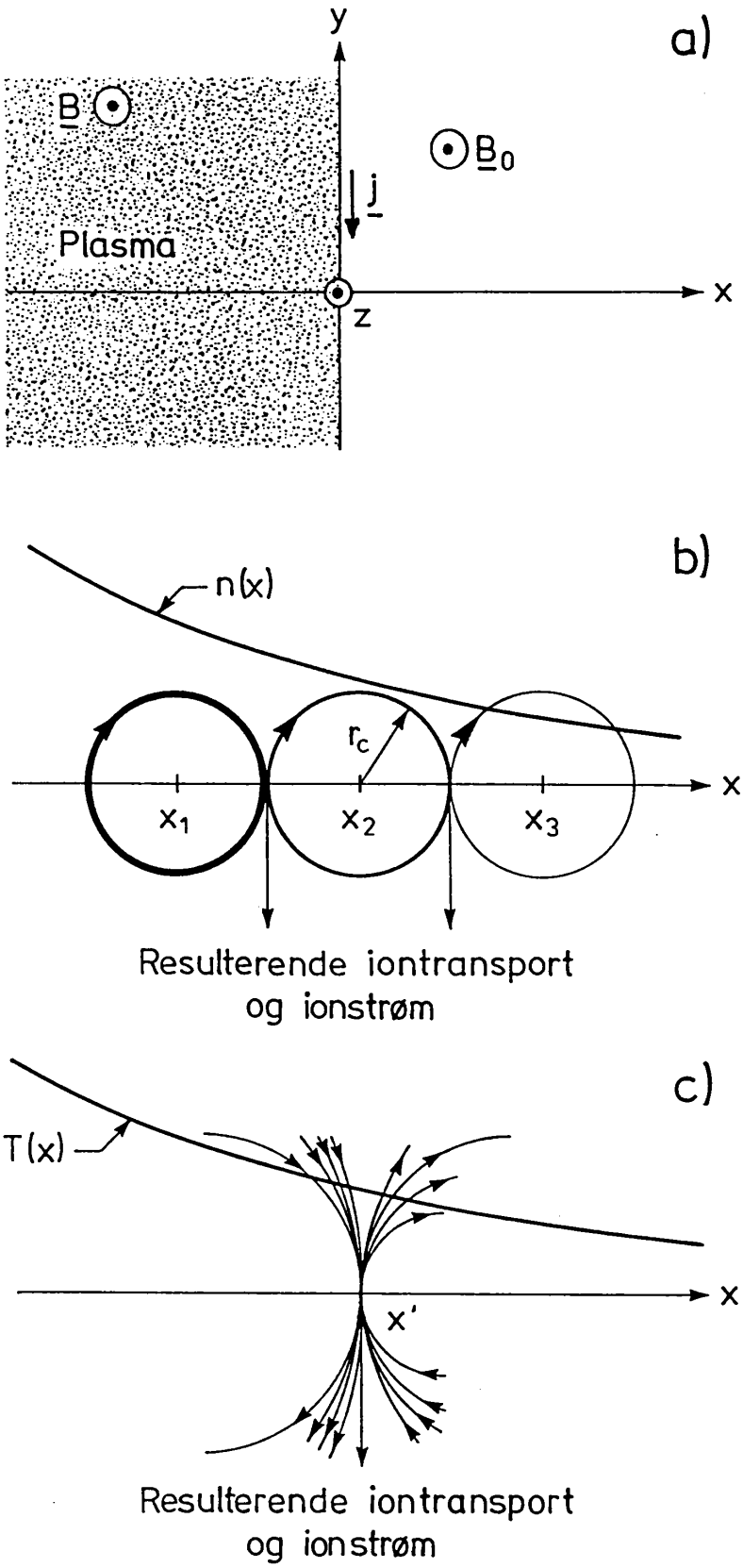

Fig. 5.3. Plasma som diamagnetisk legeme.
a) Overflade af plasma i homogent magnetfelt
b) Diamagnetisk strøm i ∇n-situation
c) Diamagnetisk strøm i ∇T-situation.

komplicerede konfigurationer, som er relevante inden for fusionsforskningen.

Vi betragter en situation som vist på Fig. 5.3.a). Plasmaet holdes indesluttet i et påtrykt homogent magnetfelt $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$. Plasmaet ligger i halvrummet $x < 0$ med overflade i y-z-planen. Det antages, at dets tæthed, temperatur og dermed tryk er uafhængige af y- og z-koordinaterne og kun varierer med x. Vi vil antage, at konfigurationen er stationær, samt at den lokale strømningshastighed overalt er nul eller vinkelret på alle gradienter i plasmaets parametre og på magnetfeltretningen, dvs. i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen i vor geometri. Med disse antagelser og med brug af (4.65) har vi $\partial/\partial t = d/dt = 0$, som indsat i ligningssystemet for ideal MHD, (4.87)-(4.92), fører til

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \tag{5.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j} \tag{5.6}$$

samt

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \,. \tag{5.7}$$

Kombinationen af (5.5) og (5.6) giver

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mu_o \nabla p \,. \tag{5.8}$$

Venstre side af (5.8) udtrykkes ved identiteten

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \equiv -\nabla B^2/2 + \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \,. \tag{5.9}$$

Sidste led i (5.9), prikproduktet mellem vektoren **B** og tensoren $\nabla\mathbf{B}$, udtrykker den vektorielle ændring i **B** ved bevægelse i **B**'s retning. I vor geometri, hvor **B**-feltlinierne er parallelle, og **B**-feltet dermed er konstant langs en feltlinie, er dette led lig nul. Vi får derfor ved indsættelse i (5.8)

$$\nabla B^2/2 + \mu_o \nabla p = 0 \,, \tag{5.10}$$

Trykbalance

der direkte integreres over x til

$$B(x)^2/2\mu_o + p(x) = \text{konstant} = B_o^2/2\mu_o \,. \tag{5.11}$$

Idet $B^2/2\mu_0$ kan opfattes som magnetfelttryk, udtrykker (5.11), at summen af magnetfelttryk og partikeltryk overalt er konstant og lig med magnetfelttrykket uden for plasmaet. (5.11) er altså en simpel trykbalanceligning. (5.11) viser også, at plasmaet er diamagnetisk, idet det svækker det påtrykte magnetfelt.

Det skal her bemærkes, at for plasmaer med anisotrope tryk som dem, der er diskuteret i afsnit 4.2, er det trykkets komponent vinkelret på magnetfeltet, $p_\perp$, der bestemmer plasmaets diamagnetiske virkning.

Strømmen i plasmaet kan findes ved hjælp af (5.5). Det ses direkte, at **j** hverken kan have komponenter i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen eller i $\hat{\mathbf{z}}$-retningen. **j** kan derfor findes ved at krydse (5.5) med **B**. Vi finder

$$\nabla p \times \mathbf{B} = (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -B^2\mathbf{j} \qquad (5.12)$$

eller

$$\mathbf{j} = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{B^2} . \qquad (5.13)$$

Diamagnetisk strøm

Som det fremgår af (5.13), vil der i plasmaet være en strømtæthed, der i områder, hvor dp/dx < 0, løber i den negative $\hat{\mathbf{y}}$-retning som angivet på Fig. 5.3.a). Det er **j** × **B**-kraften mellem denne strømtæthed og **B**-feltet, der giver koblingen mellem plasmaets tryk og magnetfelttrykket.

Umiddelbart kan det være svært at forstå, at der kan løbe en strøm vinkelret på magnetfeltlinierne i et plasma, når vi jo ved, at en sådan strøm må bæres af en transport af ladede partikler, og at alle de ladede partikler bevæger sig i gyrocirkler omkring et fast gyreocenter, som er deres middelposition, hvorfra de ikke flytter sig.

Forklaring på diamagnetisk strøm

For at forklare dette tilsyneladende paradoks ser vi på Fig. 5.3.b), hvor der er optegnet gyrobaner for nogle ioner, hvis gyrocentre ligger på $\hat{\mathbf{x}}$-aksen. Der er valgt tre grupper af ioner alle med samme hastighed og dermed samme gyroradius r_c. De tre gruppers gyrocentre ligger ved henholdsvis x_1, x_2 og x_3, og afstanden mellem x_1 og x_2 er lig afstanden mellem x_2 og x_3, og lig $2r_c$. Vi antager først, at temperaturen i plasmaet er uafhængig af x, og at plasmatætheden falder med x, dvs. dn/dx < 0. Disse antagelser bevirker, at der er flere ioner i gruppen med gyrocenter i x_1, end der er i gruppen med gyrocenter i x_2, som igen har flere ioner end den sidste gruppe med gyrocenter i x_3. Dette forhold er illustreret på Fig. 5.3.b) ved forskellige tykkelser af de indtegnede gyrocirkler. Ser vi nu på positionen midt mellem to gyrocentre, er det klart, at der er flere ioner, der passerer denne position i nedadgående retning end i opadgående, hvilket medfører en nedadrettet nettotransport af ioner, og da ionerne bærer positiv ladning, medfører det en nedadrettet strømtæthed. Da disse argumenter gælder for alle hastigheder og dermed for alle gyroradier, ser vi, at i et plasma med konstant temperatur må man forvente en strømtæthed båret af ionerne, der er proportional med dn/dx.

∇n-virkningen

∇T-virkningen

Lad os nu se på en situation, hvor plasmatætheden er uafhængig af x, medens temperaturen falder med x, dvs. dT/dx < 0. Lad os betragte et lille område omkring et punkt x' på x-aksen som vist på Fig. 5.3.c). De ioner, der bevæger sig nedad gennem dette område har alle deres gyrocentre liggende for x < x', medens de ioner, der bevæger sig opad, har deres gyrocentre liggende for x > x'. Da temperaturen falder med x, har de ioner, der har deres gyrocentre liggende for x < x', i snit større termisk hastighed - og dermed

større gyroradier - end de, der har deres gyrocentre for $x > x'$. Det betyder, at i gennemsnit bevæger de nedadrettede ioner gennem det lille område omkring x' sig hurtigere end de opadrettede, hvilket igen medfører en nedadrettet nettotransport af ioner, og dermed en nedadrettet strømtæthed.

Helt tilsvarende argumenter kan fremføres for elektronernes bidrag til strømtætheden. Elektronerne roterer den modsatte vej i deres gyrocirkler; men da de har negativ ladning, giver de også et nedadrettet bidrag til strømtætheden, både i ∇n- og i ∇T-situationerne.

Da såvel en gradient i plasmatætheden som i temperaturen giver anledning til strømme, er det ikke forbavsende, at man i udtrykket for den endelige strømtæthed (5.13) finder, at denne strømtæthed er proportionel med gradienten af produktet af tæthed og temperatur, altså med ∇p.

Bemærk ved brug af (4.54) og (4.55), at strømningshastigheden **u** har samme retning som ionernes bidrag til den elektriske strømtæthed, dvs. **u** er vinkelret på ∇p, hvilket viser, at antagelsen $\partial/\partial t = d/dt = 0$, som blev brugt ved udledningen af (5.5) og (5.6), er gyldig for det system, der er behandlet i dette afsnit.

Allerede under omtalen af effekttætheden i et fusionsplasma i kapitel 1 indførtes i (1.13) en plasmaparameter, β, der beskriver forholdet mellem partikeltrykket og magnetfelttrykket. Ved brug af (5.11) kan (1.13) skrives

$$\beta = \frac{p}{B_o^2/2\mu_o} = \frac{p}{B^2/2\mu_o + p}\,, \qquad (5.14)$$

β-definition

hvor plasmatrykket p er givet ved (4.56), og B er magnetfeltstyrken i plasmaet.

Diskussionen i dette kapitel af et plasma i et magnetfelt med rette feltlinier og specielt (5.11) giver et bedre fysisk grundlag for en forståelse af β's betydning. I praktiske fusionseksperimenter, hvor magnetfeltet ikke har rette feltlinier, bliver definitionen af β mere kompliceret. Forskellige eksempler gives i afsnit 5.6.

5.2. Toroidale Systemer

Ideal MHD teori benyttes inden for fusionsplasmafysikken til at finde magnetfeltkonfigurationer, der er gode til at holde et plasma med så høje β-værdier som muligt indesluttet og isoleret fra de materielle vægge i den omgivende beholder. Der er to hovedtyper af magnetfeltkonfigurationer, der undersøges inden for fusionsforskningen, og de er begge nævnt i kapitel 3:

a) Magnetiske spejlmaskiner, der er karakteriserede ved, at de magnetiske feltlinier forlader plasmaområdet og skærer gennem materielle vægge et sted uden for plasmaet, se Fig. 3.4.c).
b) Toroidale konfigurationer, der er karakteriserede ved, at feltlinierne løber rundt i systemet og derfor ikke skærer materielle vægge på noget sted.

Spejlmaskiner

Spejlmaskiner synes at have en meget mindre chance end de toroidale systemer for at kunne opfylde kravene for en fusionsreaktor, dvs. for at kunne opfylde Lawson-kriteriet, der er diskuteret under afsnit 1.2.6. Det skyldes forskellige forhold, bl.a. at elektronerne har en meget stor termisk ledningsevne langs magnetfeltlinierne, som bevirker, at plasmaet afkøles ved deres kontakt med væggene. Det skyldes også, at plasmaindeslutningstiden er meget kort, fordi de stød, der naturnødvendigt sker mellem de ladede partikler, har en stor sandsynlighed for at slå en partikels hastighedsvektor ind i tabskonus, hvorved partiklen straks er tabt. Endelig er det allerede nævnt i underafsnit 3.3.1, at hastighedsfordelingsfunktionen i spejlmaskiner er ustabil. Spejlmaskiner vil kun kunne udvikles til fusionsreaktorer, hvis der sker epokegørende gennembrud i arbejdet på at løse de her nævnte problemer.

Toroidale systemer

Da de toroidale systemer synes at have meget større chancer for at kunne udvikles til fusionsreaktorer, vil vi koncentrere os om dem. Toroidale systemer er som nævnt i underafsnit 3.2.6 karakteriserede ved, at vakuumkammeret har form som en bilslange, en torus, hvori plasmaet ligger som en lukket ring (se Fig. 3.3). Det holdes sammen af et magnetfelt, hvis feltlinier løber rundt i torus uden at skære gennem beholdervæggene. I det simple toroidale system, der er vist i Fig. 3.3, dannes magnetfeltet af et sæt toroidale spoler, og de cirkelformede feltlinier løber rundt i toroidal retning, i $\hat{\varphi}$-retningen. Det blev vist i underafsnit 3.2.6, at et så simpelt toroidalt system ikke kan holde et

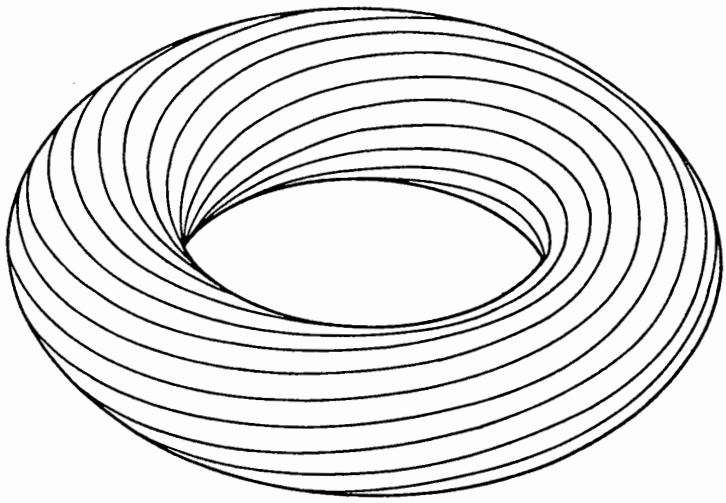

Fig. 5.4. Generelt magnetfeltlinieforløb i toroidale systemer.

plasma indesluttet; plasmaringen vil ekspandere i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen (se Fig. 3.3.b)) og hurtigt ramme væggen.

I de toroidale systemer, der arbejdes med i øjeblikket, løber magnetfeltlinierne rundt i torus på en mere kompliceret måde. De danner ikke lukkede cirkler, men snor sig i skruelinier rundt i og om plasmaringen, som vist på Fig. 5.4. At sådanne snoede magnetfeltlinier vil kunne afhjælpe plasmaets tendens til at flyde ud mod væggen, som diskuteret i underafsnit 3.2.6, ses direkte. Når magnetfeltlinierne snor sig omkring plasmaringen, vil de ladede partikler, der udgør den rumladningstæthed, der opbygges øverst og nederst i plasmaet, ved at glide langs feltlinierne neutralisere rumladningen, og det vertikale elektriske felt, der ville føre plasmaet ud mod væggen, vil derfor ikke dannes. De snoede feltlinier kortslutter det elektriske felt.

Der er forskellige måder, hvorpå skrueformede magnetfeltlinier i toroidale konfigurationer kan opnås. Vi skal her diskutere tokamakkonfigurationen i nogen detalje. Vi vil også skitsere stellaratorkonfigurationen. For de øvrige, hvoraf i flæng kan nævnes RFX (reversed field experiment), Bompy Torus, Heliotron, Torsatron, henvises til fagliteraturen, f.eks. til [13].

5.2.1. Tokamakkonfigurationen

Tokamak-geometrien

Ordet tokamak er en sammensætning af forbogstaver i de tre russiske ord for toroidalt kammer magnetisk, og det er som nævnt russiske undersøgelser, der i 1968 for alvor satte gang i tokamakforskningen. På Fig. 5.5.a) vises princippet i en tokamak. Plasmaet har form som en ring, der ligger i et toroidalt kammer; det er ikke vist på figuren. Omkring kammeret er lagt en række toroidale magnetfeltspoler, som genererer det toroidale magnetfelt. Plasmaringen, kammeret og ringen af toroidale magnetfeltspoler omslutter en transformerkerne. Plasmaringen udgør dermed den sekundære vikling på en transformer, og der kan derfor induceres en plasmastrøm, der løber rundt i plasmaet i $\hat{\varphi}$-retningen. Plasmastrømmen inducerer et polært magnetfelt, hvis feltlinier løber rundt om plasmasøjlen i $\hat{\theta}$-retningen. Superpositionen af det toroidale og det polære magnetfelt bliver så et felt, hvor linierne løber som skruelinier rundt i plasmaringen.

Af Fig. 5.5.b) fremgår koordinatretningerne i det toroidale ($\hat{\mathbf{R}}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\theta}$)-koordinatsystem, der ofte benyttes ved beregninger på plasmaer i toroidale systemer.

Inden for tokamakforskningen benyttes normalt følgende notation for plasmaer med cirkulære tværsnit (se igen Fig. 5.5):

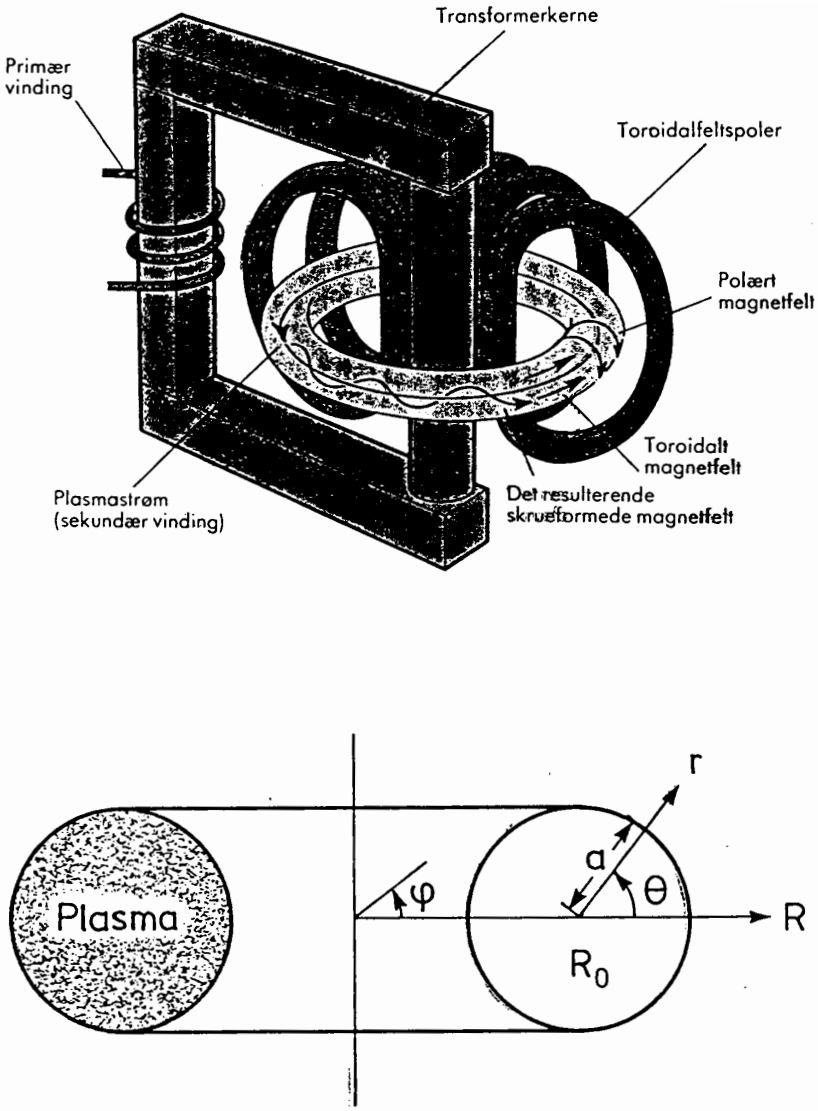

Fig. 5.5. a) Tokamakkonfigurationen.
b) Toroïdalt koordinatsystem.

Plasmaringens storradius:	R_0
Plasmaringens lilleradius:	a
Det toroidale magnetfelt:	B_t
Det polære magnetfelt:	B_p
Det vertikale magnetfelt:	B_v
Plasmastrømmen:	I_p.

Det vertikale magnetfelt er ikke vist på Fig. 5.5 Det er et ekstra magnetfelt, som er med til at holde plasmaet i ligevægt. Feltlinierne løber lodret gennem plasmaringen, og de genereres af et sæt spoler, der ligger parallelt med plasmaringen, men uden for de toroidale magnetfeltspoler. Spolerne for det vertikale felt er heller ikke vist på Fig. 5.5, men de kan ses på Fig. 5.12.b).

Ud fra de ovennævnte størrelser defineres:

$$\text{Aspektforholdet} \equiv R_o/a\,, \tag{5.15}$$

Aspektforhold

det inverse aspektforhold

$$\varepsilon \equiv a/R_o \tag{5.16}$$

Invers aspektforhold

og sikkerhedsfaktoren på plasmaoverfladen

$$q(a) \equiv \frac{B_t}{B_p(a)}\frac{a}{R_o}\,. \tag{5.17}$$

Sikkerhedsfaktor

Den fysiske betydning af ε er klar. Af geometriske grunde kan ε ikke overstige værdien én. Jo nærmere den kommer til én, des mere kompakt og tyk er tokamakopstillingen.

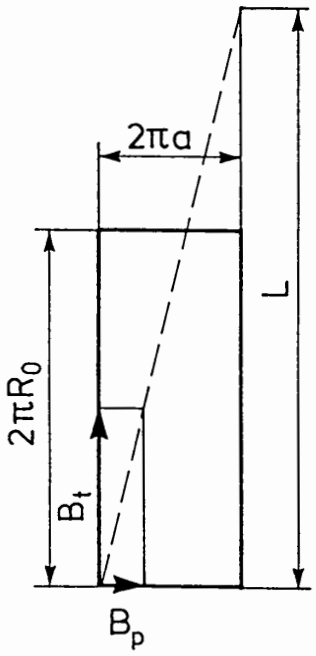

Fig. 5.6. Den geometriske betydning af q(a).

Sikkerhedsfaktorens fysiske betydning

En geometrisk forståelse af betydningen af q(a) opnås ved at udfolde plasmarøret som vist på Fig. 5.6. Plasmarørets overflade antager da form som et rektangel med siderne $2\pi a$ og $2\pi R_0$. De magnetfeltlinier, der løber på plasmaoverfladen, afbildes i dette rektangel som rette linier med hældningen B_t/B_p. Følger vi en magnetfeltlinie én gang rundt om plasmasøjlen ($2\pi a$), bevæger vi os et stykke, L, rundt langs plasmasøjlen i toroidal retning, hvor $L = 2\pi a\, B_t/B_p$. Vi finder

$$\frac{L}{2\pi R_o} = \frac{B_t}{B_p}\frac{a}{R_o} = q(a)\,. \qquad (5.18)$$

q(a) er altså det antal omgange rundt i plasmasøjlens toroidale retning, der tilbagelægges, når man bevæger sig langs en magnetfeltlinie én gang rundt om plasmasøjlen i den poloidale retning. Ovenfor er q beregnet ved plasmaoverfladen, hvor r = a. q kan naturligvis også beregnes inde i plasmaet som funktion af r. Da q afhænger af B_p, som igen afhænger af plasmastrømmens fordeling over tværsnittet, vil q(r) inde i plasmaet afhænge af plasmastrømmens fordeling over plasmasøjlens tværsnit. Man finder for cirkulære plasmatværsnit

$$q(r) = \frac{B_t r^2}{\mu_o R_o \int_o^r r' j(r') dr'}\,, \qquad (5.19)$$

hvor j(r') er plasmastrømtætheden som funktion af r'.

For ikke-cirkulære plasmatværsnit bliver q(r) en mere kompliceret størrelse.

Det vil senere blive vist, at sikkerhedsfaktorens størrelse har betydning for et tokamakplasmas ligevægts- og stabilitetsforhold.

Som det fremgår, opnås de skruede magnetfeltlinier i tokamakkonfigurationen ved hjælp af en plasmastrøm, der induceres ved brug af en transformer. Da alle transformere har et begrænset fluxsving, dvs. et begrænset antal volt·sekunder, til rådighed, kan plasmastrømmen kun opretholdes i en begrænset tid. En tokamakreaktor må derfor komme til at arbejde i en pulserende driftform. Kun hvis man kan finde en metode til en opretholde en konstant plasmastrøm, kan tokamakkonfigurationen udvikles til en kontinuerligt arbejdende reaktor.

5.2.2. Stellaratorkonfigurationen

I en stellarator opnås de skrueformede magnetfeltlinier ved hjælp af et ekstra system af ledere, der er lagt omkring torusen. Princippet er vist på Fig. 5.7. Vi genfinder de toroidale magnetfeltspoler, der danner det toroidale felt. Mellem toruskammeret og de toroidale magnetfeltspoler er lagt 6 parallelle og lukkede ledere, der snor sig omkring torus. På figur 5.7 kaldes de stellaratorledere. Hveranden af disse ledere fører strøm i + $\hat{\varphi}$-retningen og hveranden i − $\hat{\varphi}$-retningen. Disse strømme genererer magnetfelter i torus, der sammen med det toroidale felt kombineres til et felt med snoede magnetfeltlinier.

Inde i torus dannes magnetfeltlinierør med trekantlignende tværsnit. Ved bevægelse i $\hat{\varphi}$-retningen drejer trekanten sig på en sådan måde, at den følger drejningen af stellaratorlederne. Magnetfeltlinierne, der definerer det trekantede feltlinierør, snor sig om dette rør med en stigning, der afhænger af forholdet mellem strømmen i lederne og det toroidale felt.

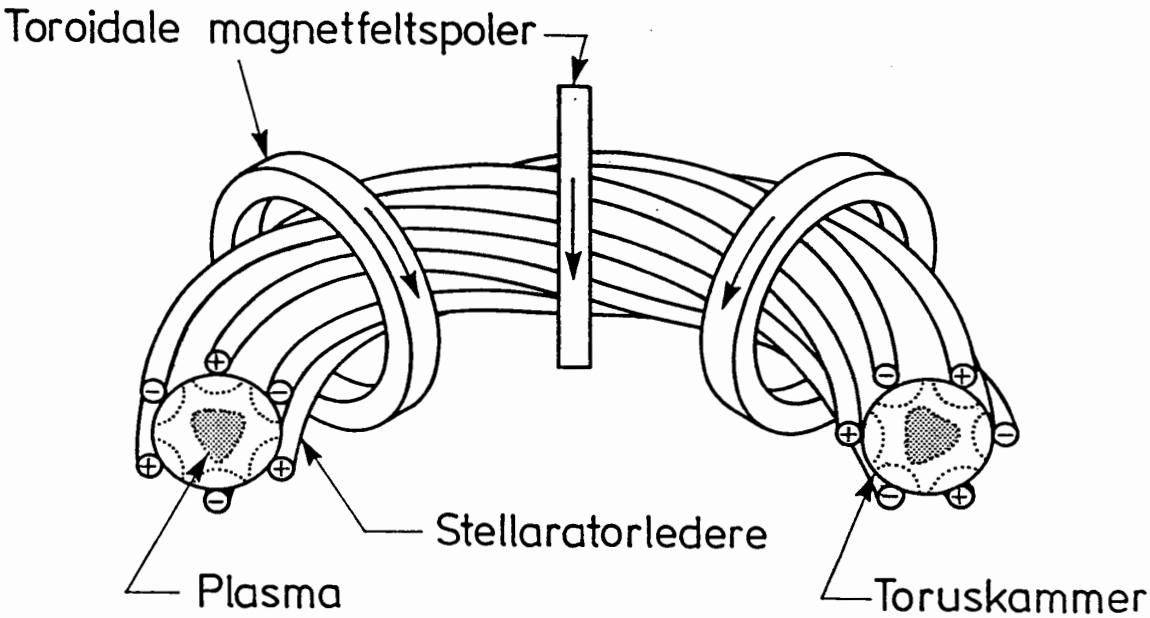

Fig. 5.7. Stellaratorkonfigurationen.

Som det fremgår, kan alle strømme, der er nødvendige for at generere stellaratorens magnetfelt, genereres fra dc-generatorer. En reaktor, der fungerer efter stellaratorprincippet, kan derfor umiddelbart være en kontinuerligt arbejdende reaktor. Til gengæld har stellaratoren den ulempe i forhold til tokamakkonfigurationen, at den er meget mere kompliceret at opbygge og vedligeholde på grund af de komplicerede spolesystemer.

5.3. Generelle Egenskaber for Plasmaer i Ligevægt i Toroidale Konfigurationer

Vi betragter et plasma, der er indesluttet i en toroidal feltkonfiguration. Vi antager, at plasmaet er i ligevægt og ikke ændrer form, dvs. at alle $\partial/\partial t = 0$. Desuden vil vi antage, at fluidhastigheden $\mathbf{u} = 0$. Tidsuafhængige ligevægtssituationer med $\mathbf{u} \neq 0$ er mulige, men de kræver, at $\mathbf{u}$ er vinkelret på $\nabla\rho$ og ∇p. Vi vil ikke her behandle sådanne situationer, men antage, at plasmaet er i ro. Med disse antagelser tager ligningerne for ideal MHD (4.87) - (4.92) formen

Ideal MHD-ligninger for ligevægtssituationer

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p \,, \tag{5.20}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \,, \tag{5.21}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \,. \tag{5.22}$$

j, p og **B**-værdier, der tilfredsstiller ligningerne (5.20) - (5.22), er mulige ligevægtssituationer.

Prikproduktet af ligning (5.20) og henholdsvis **B** og **j** fører til

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0 \tag{5.23}$$

og

$$\mathbf{j} \cdot \nabla p = 0 \,. \tag{5.24}$$

Fluxflader

Af (5.23) følger, at **B**-linierne står vinkelret på ∇p, altså at p er konstant langs en **B**-feltlinie. Det betyder, at en enkelt **B**-feltlinie løber rundt på en lukket toroidal flade med konstant tryk. Magnetfeltlinierørene eller fluxfladerne har alle torusform, og de ligger inden i hinanden som antydet på Fig. 5.8. Normalt har fluxfladerne ikke cirkulære tværsnit i polære snit.

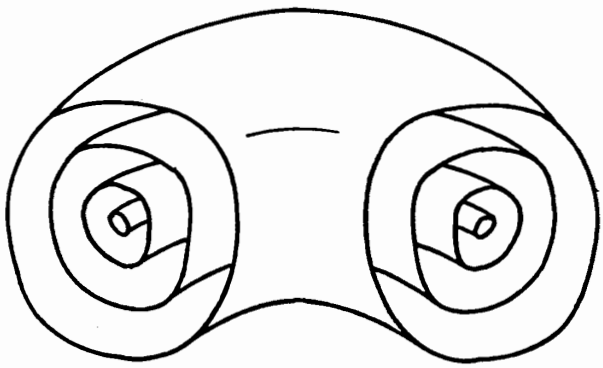

Fig. 5.8. Flader med konstant tryk er også fluxflader.

Normalt vil trykket være størst på torusaksen (ved $r = 0$) og aftage med afstanden fra aksen.

De magnetiske fluxflader deles op i to klasser:

a) Flader, hvorpå en magnetisk feltlinie løber nøjagtig tilbage i sig selv efter et vist antal omgange rundt om torus i poloidal eller toroidal retning.

b) Flader, hvorpå en magnetisk feltlinie aldrig løber nøjagtig tilbage i sig selv.

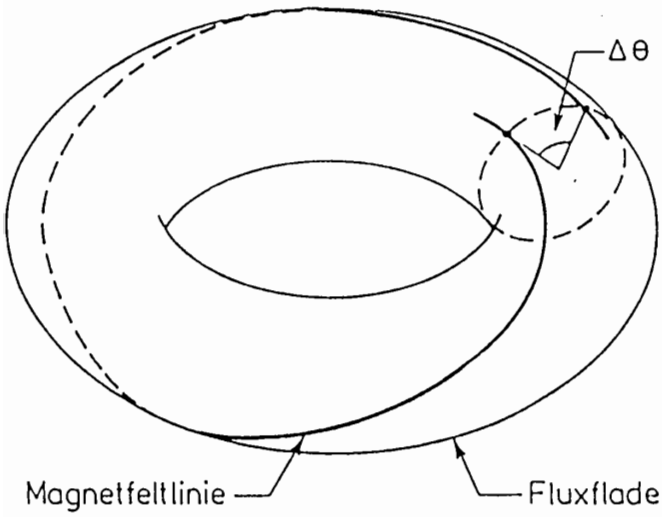

Fig. 5.9. Grafisk fremstilling af rotationstransformationen, ι.

Rotations-transformationen

Situationen er illustreret på Fig. 5.9, hvor der er vist en af de torusformede fluxflader med en enkelt magnetfeltlinie, der løber godt en gang rundt i toroidal retning. Efter én tur rundt i toroidal retning har magnetfeltlinien ændret sin vinkel i et polært plan med $\Delta\theta$. Man definerer rotationstransformationen, ι, som middelværdien af $\Delta\theta$-værdierne over mange omgange i toroidal retning, altså ved

$$\iota \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum \Delta\theta_n \,. \tag{5.25}$$

Hvis rotationstransformationen er en rationel brøkdel af 2π, løber magnetfeltlinien nøjagtig tilbage i sig selv som omtalt ovenfor under a). Hvis ikke, har vi situationen under b), hvor magnetfeltlinien aldrig løber nøjagtig tilbage i sig selv. I sidste tilfælde vil den dække hele fluxfladen.

I de fleste toroidale systemer er ι en funktion af r. r-intervaller, hvor ι ikke er en rationel brøkdel af 2π, skifter med punkter, hvor den er. På de flader, hvor ι er en rationel brøkdel af 2π, opstår der generelt specielle stabilitetsproblemer.

Bemærk, at ι og sikkerhedsfaktoren q, som blev omtalt for tokamakkonfigurationen i afsnit 5.2.1, er sammenknyttet ved

$$q(r) = \frac{2\pi}{\iota(r)} \,. \tag{5.26}$$

Det er altså ved rationelle (bl.a. heltallige) q(r)-værdier, der forventes stabilitetsproblemer i tokamakeksperimenter.

Af (5.24) følger, at også strømtætheden **j** står vinkelret på ∇p. Da, som nævnt, også fluxfladerne overalt står vinkelret på ∇p, har vi altså, at strømmen løber på fluxfladerne; den har ingen komponent vinkelret på fluxfladerne. Bemærk imidlertid, at strømtætheden normalt ikke er parallel med **B**-linierne. Når $\nabla p \neq 0$, kræver trykbalanceligningen (5.20) jo, at **j** har en komponent vinkelret på **B**.

Fluxfladestørrelser

Fra den kendsgerning, at både **B** og **j** løber på fluxfladerne, følger, at følgende størrelser:

Den toroidale strøm

$$I_{\text{tor}} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}_t \,, \tag{5.27}$$

den polære strøm

$$I_{\text{pol}} = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}_p \,, \tag{5.28}$$

den toroidale flux

$$\psi_t = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_t \tag{5.29}$$

og den polære flux

$$\psi_p = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}_p \tag{5.30}$$

er størrelser, der kun afhænger fluxfladen. Fig. 5.10 viser de to fladeelementer $d\mathbf{S}_p$ og $d\mathbf{S}_t$. $d\mathbf{S}_t$-integralerne i (5.27) og (5.29) skal udføres over hele tværsnittet af et polært snit gennem fluxfladen. $d\mathbf{S}_p$-integralerne i (5.28) og (5.30) skal udføres over S_p-fladen fra den magnetiske akse ved $r = 0$ ud til fluxfladen, der strækker sig over hele vinklen 2π i toroidal retning. Integralerne i (5.27) og (5.29) er uafhængige af den toroidale position (φ-værdien) af det polære snit, og integralerne i (5.28) og (5.30) er uafhængige af den polære position (θ-værdien) af den flade, der integreres over. Størrelser som de, der er givet ved (5.27) - (5.30), og som kun afhænger af, hvilken fluxflade der vælges, kaldes fluxfladestørrelser. Af andre størrelser, som ud fra deres definition er fluxfladestørrelser, kan nævnes plasmatrykket og rotationstransformationen. Bemærk, at størrelser som det polære magnetfelt, det toroidale magnetfelt og strømtætheden ikke er fluxfladestørrelser.

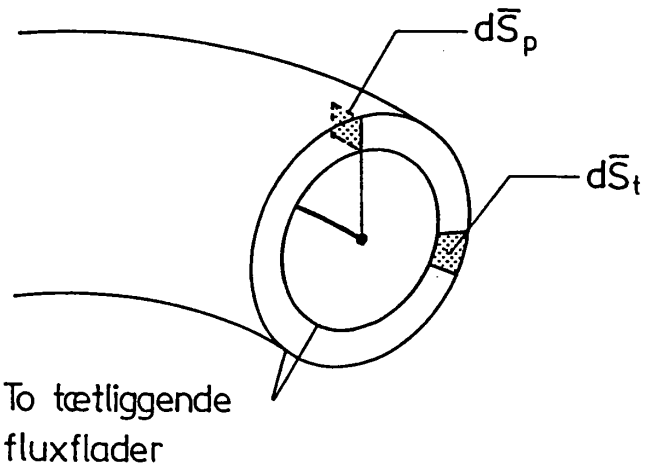

Fig. 5.10. Grafisk fremstilling af integrationsfladerne for dS_t- og dS_p-integralerne.

Eksistensen af fluxfladestørrelser gør, at fluxfladerne er en god variabel parameter at indføre ved beregning af ligevægts- og stabilitetsegenskaber for plasmaer i toroidale systemer.

5.4. Kvalitative Betragtninger over Plasmaindeslutning i Toroidale Konfigurationer

Toroidale plasmaers udvidelsestendenser

En plasmaring i et toroidalt system har en indbygget tendens til at udvide sig i både $\hat{\mathbf{r}}$- og $\hat{\mathbf{R}}$-retningen. Tendensen skyldes, at partikeltrykket vil stræbe mod at forøge plasmaets volumen. Situationen er helt analog med en gas, der under tryk holdes indesluttet i en gummislange (cykelslange). Trækspændinger i slangevæggen skal kompensere for gassens tendens til at udvide sig i både $\hat{\mathbf{r}}$- og $\hat{\mathbf{R}}$-retningen og dermed etablere en ligevægtstilstand. For plasmaringens vedkommende er det magnetfeltkonfigurationen, der skal være i stand til at holde plasmaet indesluttet og erstatte spændingerne i gummivæggene.

Ved siden af den ovennævnte trykbetingede tendens til, at plasmaringen udvider sig i både $\hat{\mathbf{r}}$- og $\hat{\mathbf{R}}$-retningen, har en plasmaring, der bærer en strøm i $\hat{\varphi}$-retningen, en ekstra tendens til at udvide sig i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen. Denne tendens skyldes den kraft, der på engelsk kaldes "the hoop force". Den skyldes vekselvirkningen mellem strømmen og det magnetfelt, som den selv genererer, og den kan lettest forstås som frastødningen mellem de modsat rettede strømme i diametralt modsatte segmenter af ringen.

For at få en kvalitativ fornemmelse af et toroidalt systems evne til at holde et plasma indesluttet i en stabil ligevægtssituation ser vi på to grænsetilfælde:

a) rent toroidalt felt svarende til $q \to \infty$
b) rent poloidalt felt svarende til $q = 0$.

Kompensation mod udvidelse i $\hat{\mathbf{r}}$-retningen

Både det rent toroidale felt og det rent poloidale felt kan kompensere for plasmaringens tendens til at ekspandere i $\hat{\mathbf{r}}$-retningen. For det rent toroidale felts vedkommende sker det ved, at der i plasmaoverfladen løber diamagnetiske strømme, som vekselvirker med magnetfeltet, og derved holder plasmaet indesluttet, som allerede diskuteret i underafsnit 5.1.2. For det rent poloidale felts vedkommende er situationen forskellig. Plasmastrømmen i $\hat{\varphi}$-retningen genererer det poloidale magnetfelt. Vekselvirkninen mellem strømmen og magnetfeltet giver et indadrettet Lorentz-tryk, som kompenserer plasmatrykkets tendens til at udvide plasmaringen i $\hat{\mathbf{r}}$-retningen ved at opfylde ligning (5.20). Forholdene er vist på Fig. 5.11.

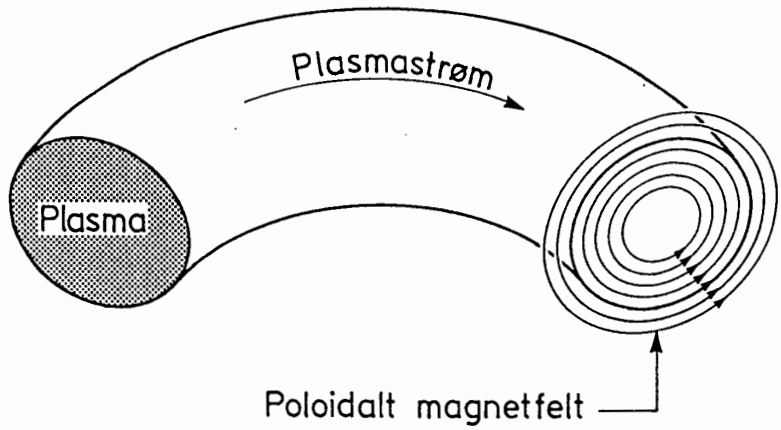

Fig. 5.11. $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$*-tryk i* $-\hat{\mathbf{r}}$*-retningen kompenserer plasmatryk i* $+\hat{\mathbf{r}}$*-retningen i rent poloidalt felt.*

Poloidalt felts kompensation mod udvidelse i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen

Vi ser nu på det rent poloidale felts evne til at kompensere for plasmaringens tendens til at udvide sig i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen. Denne tendens skyldes som nævnt, at såvel plasmatrykket som "the hoop force" vil stræbe mod at udvide plasmaringen i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen. Der er to måder at kompensere for denne udadrettede trykkraft.

Perfekt ledende vægge

Den ene opnås ved at benytte et torusformet vakuumkammer, som har vægge af perfekte ledere. Når plasmaringen begynder at ekspandere i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen, vil det poloidale magnetfelt komprimeres mellem plasmaet og kammervæggen; det kan jo ikke forsvinde, da den samlede poloidale flux mellem plasma og kammervæg er konstant. Når plasmaet har bevæget sig et stykke

i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen, bliver det indadrettede magnetfelttryk på dets yderside så stort, at det kan kompensere de nævnte udadrettede tryk. Situationen er illustreret på Fig. 5.12.a).

Vertikalt felt

Den anden måde at kompensere de udadrettede trykkræfter opnås ved at indføre et vertikalt felt, $\mathbf{B}_v$, gennem plasmaet, som allerede nævnt i underafsnit 5.2.1. Et sådant vertikalt felt kan genereres af spoler, der ligger parallelt med plasmaringen, men uden for denne, som vist på Fig. 5.12.b). Det vertikale felt skal have en sådan retning, at det forstærker det poloidale felt i området omkring $R = R_0 + a$ og svækker det i området omkring $R = R_0 - a$. $\mathbf{j} \times \mathbf{B}_v$-trykket bliver så et magnetisk tryk, der påvirker plasmaringen i den negative $\hat{\mathbf{R}}$-retning, og som derfor kan kompensere de udadrettede plasmatryk.

I praksis benyttes begge metoder; den sidste har den fordel, at man ved at variere $\mathbf{B}_v$ kan placere plasmaet i den position, man ønsker.

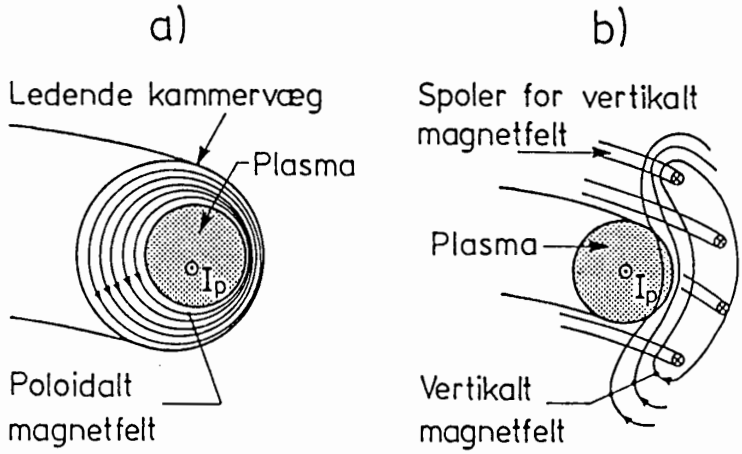

Fig. 5.12. a) Plasma holdt i ligevægt ved hjælp af komprimeret magnetfelt.
b) Plasma holdt i ligevægt ved hjælp af vertikalt magnetfelt.

Toroidalt felts kompensation mod udvidelse i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen

Vi vender os nu mod det rent toroidale felt for at vurdere dets evne til at kompensere for plasmaringens tendens til at udvide sig i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen. Også her er der to grunde til, at plasmaringens storradius har en tendens til at forøges. Den ene er partikeltrykket; den anden er, at magnetfelttrykket, der skyldes Lorentzkraften mellem det toroidale magnetfelt og de diamagnetiske strømme, er større på plasmaringens inderside end på ydersiden. Vi vil nu beregne den indadrettede kraft pr. længdeenhed plasmaring, M_p, der er nødvendig for at kompensere for plasmaringens tendens til at udvide sig.

Vi ser på en plasmaring i et rent toroidalt felt som vist på Fig. 5.13. Uden for plasmaet er det toroidale felt omvendt proportionalt med R og givet ved

$$B_t(R) = R_t(R_o)\frac{R_o}{R}\,, \qquad (5.31)$$

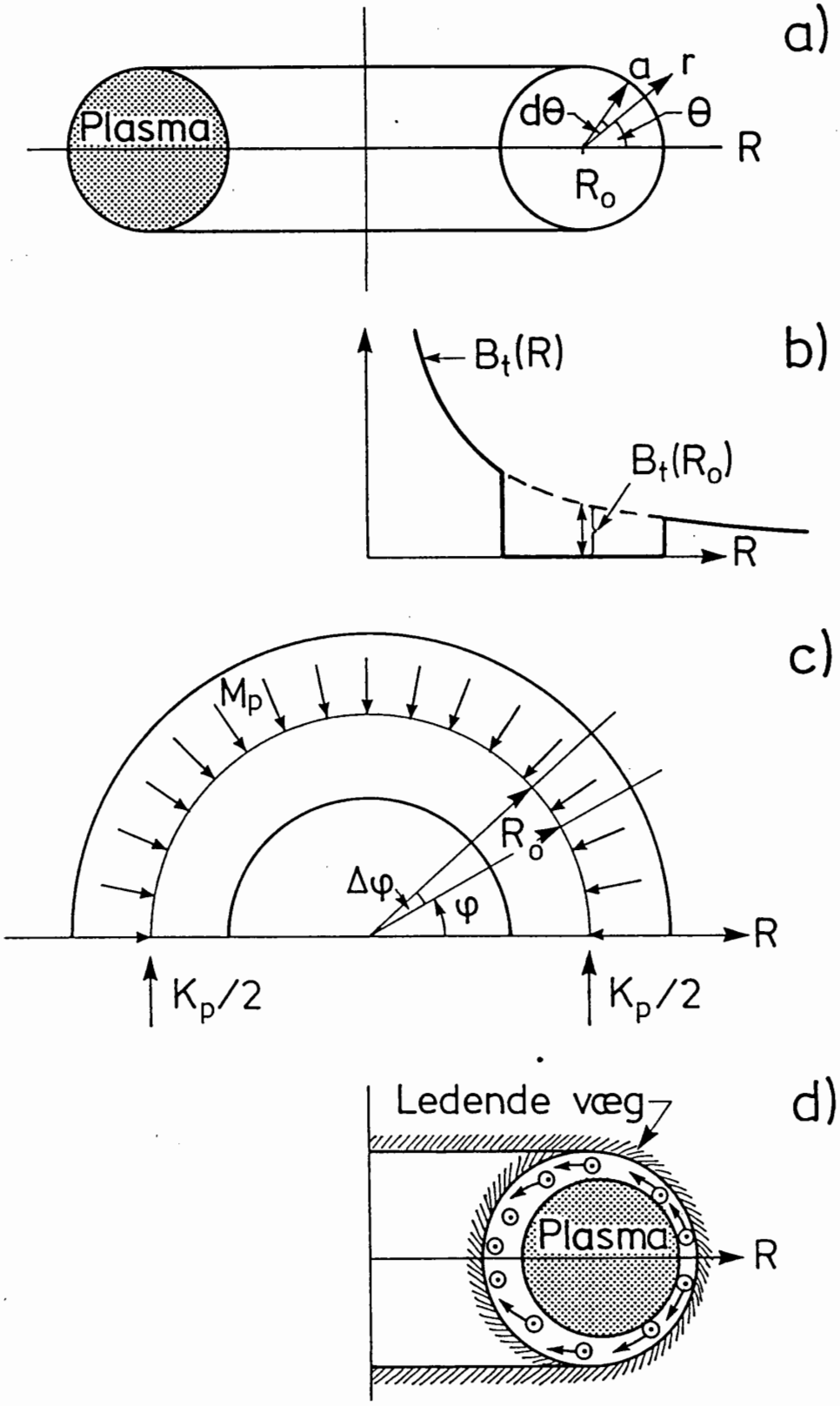

Fig. 5.13. Plasma i rent toroidalt felt.
a) Den toroidale geometri
b) Det toroidale felts R-afhængighed
c) Kræfter på plasmaring i toroidalt felt
d) Ledende væg holder ikke plasma i toroidalt felt indesluttet

hvor $B_t(R_o)$ er det felt, der ville have været i plasmaringens midte, hvis plasmatrykket havde været nul. Vi vælger at behandle et plasma, hvis β-værdi er 1, hvilket betyder, at plasmaets partikeltryk, p, er lig med magnetfelttrykket lige uden for plasmaet, se (5.14). Herved har vi, at plasmaets diamagnetiske virkning fuldstændig fortrænger det toroidale felt i selve plasmaet, som vist på Fig. 5.13.b).

Partikeltrykbetinget udvidelsestendens

Vi beregner først den indadrettede kraft pr. længdeenhed, M_p, som er nødvendig for at kompensere plasmaringens trykbetingede tendens til at udvide sig. På Fig. 5.13.c) er vist halvdelen af plasmaringen set ovenfra. Denne halvdel påvirkes af den ikke viste halvdel med plasmatrykket p i snitfladerne. Den samlede trykkraft, der påvirker den halve plasmaring, er da

$$K_p = 2\pi a^2 p \,. \tag{5.32}$$

Hver af de to snitflader påvirkes af $K_p/2$. K_p-kraften skal kompenseres af M_p, der som vist på Fig. 5.13.c), f.eks. kan angribe på plasmaringens cirkelformede akse med radius R_o. Ved at tage komponenten i K_p's retning af den samlede virkning af M_p findes

$$K_p = \int_o^{\pi} M_p \sin\phi R_o d\phi \,, \tag{5.33}$$

der ved brug af (5.32) fører til

$$M_p = \frac{\pi a^2 p}{R_o} \,. \tag{5.34}$$

Magnetfelttrykbetinget udvidelsestendens

Vi beregner dernæst den indadrettede kraft pr. længdeenhed. M_B, som er nødvendig for at kompensere plasmaringens magnetfeltbetingede tendens til at udvide sig i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen. Det toroidale magnetfelt i et punkt (θ,a) på plasmaoverfladen findes ved hjælp af (5.31) til

$$B_t(\theta, a) = B_t(R_o)\frac{R_o}{R_o + a\cos\theta} = \frac{B_t(R_o)}{1 + \varepsilon\cos\theta} \,. \tag{5.35}$$

Heraf findes for magnetfelttrykket i (θ,a)

$$\frac{B_t^2(\theta, a)}{2\mu_o} = \frac{B_t^2(R_o)}{2\mu_o(1 + \varepsilon\cos\theta)^2} \,. \tag{5.36}$$

Vi beregner nu den resulterende udadrettede (dvs. i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen) kraft, K_m, på overfladen af segmentet mellem φ og φ + Δφ, se Fig. 5.13.c). Idet magnetfelttrykket altid påvirker plasmaringen i $-\hat{\mathbf{r}}$-retningen findes

$$K_m = -\int_o^{2\pi} \frac{B_t^2(\theta,a)}{2\mu_o} a d\theta (R_o + a\cos\theta)\Delta\phi\cos\theta$$

$$= \frac{-B_t^2(R_o)}{2\mu_o} a R_o \Delta\phi \int_o^{2\pi} \frac{\cos\theta d\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}\,, \qquad (5.37)$$

der til første orden i det inverse aspektforhold ε bliver

$$K_m = \frac{B_t^2(R_o)}{2\mu_o} a R_o \Delta\phi \varepsilon\pi\,. \qquad (5.38)$$

Den resulterende udadrettede magnetiske kraft pr. længdeenhed plasmaring, M_m, fås ved at dividere (5.38) med segmentets udstrækning i toroidal retning, $R_o\Delta\varphi$.

$$M_m = \frac{\pi a^2}{R_o}\frac{B_t^2(R_o)}{2\mu_o}\,. \qquad (5.39)$$

Den samlede udadrettede kraft pr. længdeenhed plasmaring bliver summen af (5.34) og (5.39):

$$M = M_p + M_m = \frac{\pi a^2}{R_o}\left(p + \frac{B_t^2(R_o)}{2\mu_o}\right)\,, \qquad (5.40)$$

som i vort tilfælde med $\beta = 1$ og dermed $p = B_t^2(R_o)/2\mu_o$ bliver

$$M = \frac{2\pi a^2 p}{R_o}\,. \qquad (5.41)$$

Ligevægtskrav kan ikke opfyldes

For at holde plasmaet i ligevægt kræves det altså, at det påvirkes af en indadrettet kraft pr. længdeenhed af plasmaringen, der er lig med M. En sådan kraft kan det toroidale magnetfelt **ikke** yde. Plasmaringen kan ændre sin position i det toroidale kammer, uden at der opstår en resulterende påvirkning af magnetiske kræfter fra det toroidale felt, på samme måde som en almindelig leder frit kan bevæges rundt i et magnetfelt. Heller ikke en ledende kammervæg kan holde plasmaet på plads i dette tilfælde. Når plasmaet bevæger sig ud mod væggen vil magnetfeltlinierne blot glide forbi plasmaet som antydet på Fig. 5.13.d), og der vil ikke opstå et forøget plasmatryk mellem plasma og væg. Det vertikale magnetfelt, der kunne holde et plasma i balance i et poloidalt felt, vil heller ikke kunne påvirke plasmaet i det rent

toridale felt, fordi krydsproduktet mellem de diamagnetiske strømme og et vertikalt felt ikke har nogen resulterende komponent i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen.

Toroidalt felt virker stabiliserende

Når der alligevel er brug for en toroidal komponent i magnetfeltet i toroidale maskiner, skyldes det, at det toroidale felt hjælper med til at stabilisere et plasma, som holdes i ligevægt i poloidale felter. Hvis plasmaringen f.eks. begynder at sno sig som en spiral, eller hvis den et eller andet sted får en tendens til at snøre sig af (til at formindske sin lilleradius), så vil tilstedeværelsen af en toroidal magnetfeltkomponent stabilisere plasmaet. Det viser sig, at man kun får et stabilt plasma, hvis B_t er tilstrækkelig stor, svarende til at q skal være over en vis grænse, som viser sig at være ca. 3. Dette diskuteres dybere i underafsnit 5.5.5.

Ligevægtskravet skal opfyldes

For at vurdere om det overhovedet er nødvendigt at holde plasmaet indesluttet i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen vil vi nu beregne, hvor hurtigt en plasmaring i et rent toroidalt felt vil ekspandere ud til væggen i det omgivende kammer. Vi ser på en længdeenhed af plasmaringen. Den har massen $nm_i a^2\pi$, og den påvirkes af kraften, M, givet ved (5.41). Newtons anden lov er da

$$\pi n m_i a^2 \frac{du}{dt} = \frac{2\pi a^2}{R_o} p \,. \tag{5.42}$$

Lad os starte med at se på ringen på et tidspunkt, hvor den er i ro, dvs. $u = 0$. Integration af (5.42) fører til

$$u = \frac{2p}{R_o n m_i} t \,. \tag{5.43}$$

En yderligere integration fører til, at plasmaringen i tiden t har bevæget sig til stykket L, hvor

$$L = \frac{p}{R_o n m_i} t^2 \,. \tag{5.44}$$

For at nå ud til væggen skal plasmaet bevæge sig et stykke, der karakteristisk er lig lilleradius a. Ifølge (5.44) tager det tiden

$$\tau = \left(\frac{a R_o n m_i}{p} \right)^{1/2} , \tag{5.45}$$

der med $p = 2n\kappa T$ (se 4.56) fører til

$$\tau = \left(\frac{a R_o m_i}{2\kappa T} \right)^{1/2} . \tag{5.46}$$

Indsættes heri følgende værdier, der er karakteristiske for et fusionsplasma, a = 1 m, R_0 = 3 m, $m_i = m_D = 3 \cdot 10^{-27}$ kg og κT = 10 keV, findes

$$\tau \simeq 1,7 \ \mu s \ . \tag{5.47}$$

Lad plasmaets tæthed n være 10^{20} m^{-3}, der også er karakteristisk for et fusionsplasma. Hermed opnås for Lawson-produktet

$$n\tau = 1,7 \cdot 10^{14} sm^{-3} \ , \tag{5.48}$$

hvilket er ca. 6 størrelsesordener under den nødvendige værdi for et fusionsplasma, som det er diskuteret i underafsnit 1.2.6. Det fremgår heraf, at det er absolut nødvendigt at benytte en magnetfeltkonfiguration, der kan holde plasmaet indesluttet i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen.

5.5. Kvantitative Betragtninger over Plasmaindeslutning i En-dimensionale Konfigurationer

I afsnit 5.4 præsenteredes kvalitative betragtninger over toroidale magnetfeltsystemers evne til at holde indesluttede plasmaer i ligevægt. En kvantitativ beskrivelse af plasmaers ligevægt i toroidale systemer er kompliceret og uden for denne bogs rammer. Sådanne behandlinger kan findes i f.eks. [12], [13] og [14]. Man kan imidlertid komme langt i retning af en kvantitativ behandling af såvel trykbalance som stabilitet i $\hat{\mathbf{r}}$-retningen ved at betragte én-dimensionale plasmaer, dvs. lange, rette plasmastrenge, der er holdt sammen i passende magnetfelter. Sådanne strenge kan jo opfattes som toroidale plasmaringe, der er rettet ud. Trykbalancen i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen for en toroidal plasmaring kan naturligvis ikke behandles ved at betragte udrettede plasmastrenge, da de resulterende kræfter i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen på en plasmaring jo netop skyldes ringens bøjning.

I det følgende ser vi først på den udrettede udgave af en plasmaring i et rent toroidalt felt, dvs. vi betragter en strømløs plasmastreng i et homogent magnetfelt. En sådan plasmastreng kaldes en θ-pinch. Derefter behandler vi den såkaldte Z-pinch, som er den udrettede udgave af en plasmaring i et rent poloidalt felt. Endelig ser vi på skruepinchen, som er den udrettede udgave af en plasmaring i en normal tokamakkonfiguration med en endelig q-værdi.

5.5.1. θ-pinchen

Tager man en toroidal konfiguration med en plasmaring i et rent toroidalt magnetfelt og tænker sig den rettet ud, får man en situation som skitseret på

Fig. 5.14. Den toroidale konfigurations toroidale felt, B_t, kaldes her B_z, og styrken af det ydre påtrykte felt kaldes B_{oz}. Plasmaringen repræsenteres af et stykke af længden $2\pi R_0$ af plasmastrengen på Fig. 5.14.

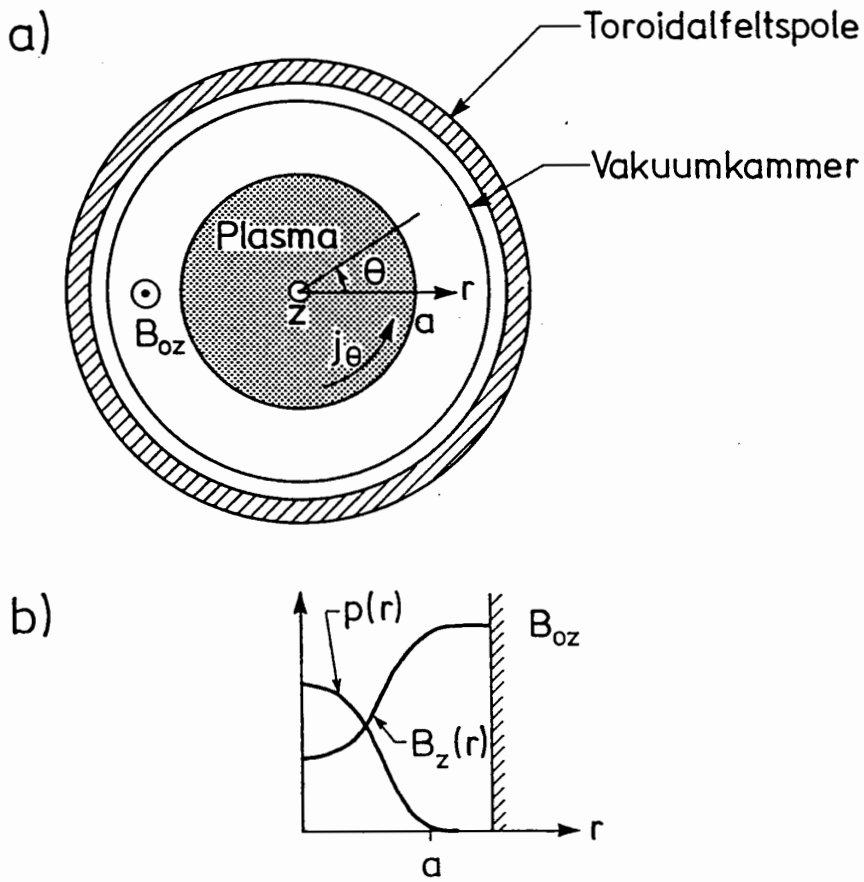

Fig. 5.14. θ-pinch.
a) Plasmastreng i homogent magnetfelt.
b) Variation af tryk og magnetfelt over plasmastrengen.

Ligevægtssituationen for plasmastrengen beskrives ved hjælp af ligningerne for ideal MHD, (4.87)-(4.92). Samme type antagelser, som blev benyttet i underafsnit 5.1.2, hvor et plasmas diamagnetiske egenskaber blev behandlet, fører til, at plasmastrengen beskrives ved (5.5) og (5.6). Antagelserne er, at konfigurationen er stationær, og at alle lokale strømningshastigheder enten er nul eller vinkelret på alle gradienter i plasmaets parametre, dvs. i $\hat{\theta}$-retningen i den aksesymmetriske geometri på Fig. 5.14.

Ligningerne (5.5) og (5.6) løses let i det (r,θ,z)-koordinatssystem, der fremgår af Fig. 5.14. a). Idet **B**-feltet kun har z-komponenter, og alle plasmaparametrene kun afhænger af r, findes af (5.6)

$$\mathbf{j} = j_\theta \hat{\theta} = -\frac{1}{\mu_o}\frac{dB_z}{dr}\hat{\theta} \,. \qquad (5.49)$$

Af (5.5) følger så

$$j_\theta B_z = \frac{dp}{dr}\,, \tag{5.50}$$

der kombineret med (5.49) fører til

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{B_z^2}{2\mu_o} + p\right] = 0 \tag{5.51}$$

eller efter integration

$$\frac{B_z(r)^2}{2\mu_o} + p(r) = \frac{B_{oz}^2}{2\mu_o}\,. \tag{5.52}$$

θ-pinchens trykbalance

Vi genfinder her resultatet fra underafsnit 5.1.2, at et plasma i et homogent magnetfelt er et diamagnetisk legeme. Den diamagnetiske virkning beskrives igen ved β, som givet i ligning (5.14).

Som det fremgår af ovenstående, kan en plasmastreng med en vilkårlig symmetrisk trykprofil, p(r), holdes indesluttet i en ligevægtssituation i et homogent magnetfelt. Det eneste krav er, at p(r) overalt er mindre end trykket, $B_{oz}^2/2\mu_o$, af det ydre påtrykte magnetfelt. Er denne betingelse opfyldt, vil der i plasmaet løbe diamagnetiske strømme i $\hat{\theta}$-retningen, som sammen med B_z-feltet producerer et Lorentz-tryk i $-\hat{\mathbf{r}}$-retningen, som udbalancerer plasmaets modsatrettede partikeltryk.

Magnetfeltkonfigurationen kan derimod ikke holde plasmaet fast i sin position. Der er ingen kræfter, der forhindrer en parallelforskydning af plasmastrengen bort fra den oprindelige position. Enhver lille påvirkning af plasmastrengen vil derfor få den til, uden hindring, at bevæge sig, ligesom enhver anden leder i et homogent magnetfelt kan parallelforskydes, uden at der opstår kraftpåvirkning fra magnetfeltet. Vi har her samme situation som den, der blev diskuteret for en toroidal plasmaring sidst i afsnit 5.4, hvor det blev vist, at en plasmaring i et rent toroidalt felt ikke er i ligevægt, men at den vil ekspandere i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen som følge af både plasmatrykket og den resulterende udadrettede Lorentzkraft.

5.5.2. Z-pinchen

Tager man en toroidal konfiguration med en plasmaring i et rent poloidalt magnetfelt og tænker sig den rettet ud, får man den situation, som er skitseret på Fig. 5.15. Den toroidale konfigurations poloidale felt, B_p, kaldes her B_θ. Et stykke af længden $2\pi R_o$ repræsenterer igen plasmaringen i en toroidal konfiguration.

Ligevægtsbetingelsen for Z-pinchen findes igen ved hjælp af ligningerne (5.5) og (5.6), der igen løses i det (r,θ,z)-cylinderkoordinatsystem, som fremgår af Fig. 5.15.a). Idet **B**-feltet kun har komponent i $\hat{\theta}$-retningen, og idet der antages fuld symmetri omkring z-aksen, har (5.6) kun komponent i $\hat{\mathbf{z}}$-retningen, den er

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB_\theta(r)) = \mu_o\, j_z(r)\ . \tag{5.53}$$

Tilsvarende har (5.5) kun komponent i $\hat{\mathbf{r}}$-retningen, den er

$$j_z(r)\, B_\theta(r) = -\frac{dp(r)}{dr}\ . \tag{5.54}$$

Kombination af (5.53) og (5.54) fører til trykbalanceligningen

$$\frac{d}{dr}\left(p(r) + \frac{B_\theta^2(r)}{2\mu_o}\right) + \frac{B_\theta^2(r)}{\mu_o r} = 0\ . \tag{5.55}$$

Z-pinchens trykbalance

Ligning (5.55) beskriver balancen mellem plasmatryk og magnetfelttryk hen over Z-pinchens tværsnit, på samme måde som (5.51) og (5.52) beskriver trykbalancen i θ-pinchen. Ligning (5.55) og (5.51) afviger fra hinanden ved sidste led på venstre side af (5.55); dette led optræder, fordi magnetfeltlinierne er krumme i Z-pinchtilfældet, medens de er rettet i θ-pinchen. Krumme magnetfeltlinier påvirker et volumenelement af et plasma i et magnetfelt med en extra trækkraft langs magnetfeltlinierne. En fysisk fortolkning af dette forhold diskuteres senere i dette afsnit.

Bennett-profil

Der kan konstrueres mange forskellige profiler, der opfylder (5.55). En af dem er den såkaldte Bennett-profil, der blev studeret af Bennett allerede i 1934. I Bennett-profilen er

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_o I_p}{2\pi}\frac{r}{r^2 + a^2}\ , \tag{5.56}$$

$$j_z(r) = \frac{I_p}{\pi}\frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2}\ , \tag{5.57}$$

$$p(r) = \frac{\mu_o I_p^2}{8\pi^2}\frac{a^2}{(r^2 + a^2)^2}\ . \tag{5.58}$$

Den totale strøm i plasmaet, I_p, er knyttet til strømtætheden j_z gennem

$$I_p = \int_0^\infty j_z(r)\, 2\pi r\, dr \,. \qquad (5.59)$$

Det ses direkte ved integration, at strømprofilen (5.57) opfylder (5.59).

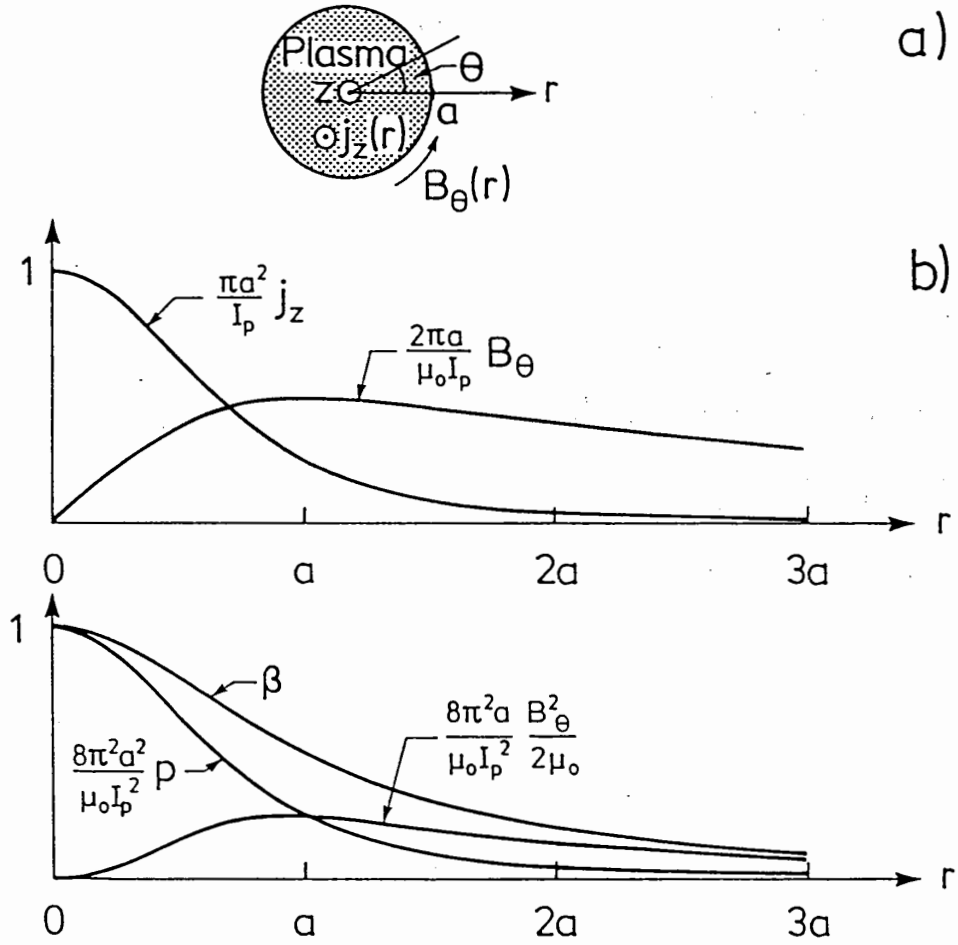

Fig. 5.15. Z-pinch.
a) Strømførende plasmastreng med tilhørende B_θ-felt,
b) Profiler for Bennett-pinchen.

Det vises let ved indsættelse af (5.56), (5.57) og (5.58), at disse profiler opfylder trykbalanceligningen (5.55). Man bemærker også, at summen af partikeltrykket og magnetfelttrykket afhænger af r i modsætning til situationen for θ-pinchen. Dette skyldes sidste led på venstre side af (5.55).

Magnetfelttryk-magnetfelttræk-konceptet

Den simple fysiske fortolkning af trykbalancebetingelsen for plasmaer indesluttet i homogene påtrykte magnetfelter, som er udtrykt ved (5.11) og (5.52), holder altså ikke for plasmaer i inhomogene magnetfelter som det B_θ-felt, der diskuteres her. Ved at udvide konceptet om, at et magnetfelt yder et tryk af størrelsen $B^2/2\mu_o$ vinkelret på feltlinierne til, at det også yder et

træk af størrelsen $B^2/2\mu_0$ parallelt med feltlinierne, vil vi nu vise, at også Z-pinchen som beskrevet ved (5.55) er i balance, når såvel tryk- som trækkræfter medregnes.

Tanken om at opfatte et magnetfelt som ydende et tryk af størrelsen $B^2/2\mu_0$ vinkelret på feltlinierne begrundes i resultaterne fra behandlingen af plasmaer i homogene påtrykte magnetfelter, der førte til (5.11) og (5.52). Tanken om at opfatte et magnetfelt som ydende et træk af størrelsen $B^2/2\mu_0$ langs feltlinierne begrundes i den velkendte kendsgerning, at to magnetpoler, en syd- og en nordpol, der er rettet mod hinanden, påvirker hinanden med en tiltrækningskraft pr. arealenhed, der har størrelsen $B^2/2\mu_0$.

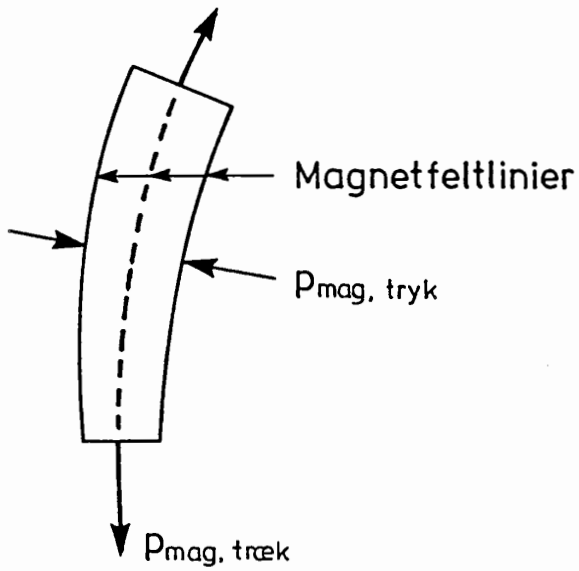

Fig. 5.16. Skematisk fremstilling af magnetiske tryk- og trækpåvirkning på rumelement med form som magnetfeltlinierør.

Det koncept med tryk- og trækkræfter, der påvirker et rumelement i et magnetfelt, er skitseret på Fig. 5.16. Her er valgt et volumenelement med form som et magnetfeltlinierør og afskåret med to snit, der står vinkelret på magnetfeltlinien midt gennem røret. Endefladerne påvirkes af magnetiske træk, $p_{mag.træk.}$, der står vinkelret på fladerne og dermed er parallelle med feltlinierne. Tilsvarende påvirkes sidefladerne af indadrettede magnetiske tryk, $p_{mag.tryk.}$, der står vinkelret på magnetfeltlinierne og dermed på overfladerne af elementets sideflader. Endelig påvirkes hele rumelementet af et indadrettet plasma partikeltryk, $p_{part.}$, på alle siderne. Dette partikeltryk er ikke vist på Fig. 5.16.

Konceptet anvendt på Z-pinchen

Det skal nu vises, at tryk-trækbalance for et magnetfeltlinierør i en Z-pinch efter ovenstående koncept fører til overensstemmelse med trykbalanceligningen (5.55). Figur 5.17 viser et halvcirkelformet feltlinierør af en Z-pinch med de tryk- og trækpåvirkninger, som påvirker det ifølge vort koncept.

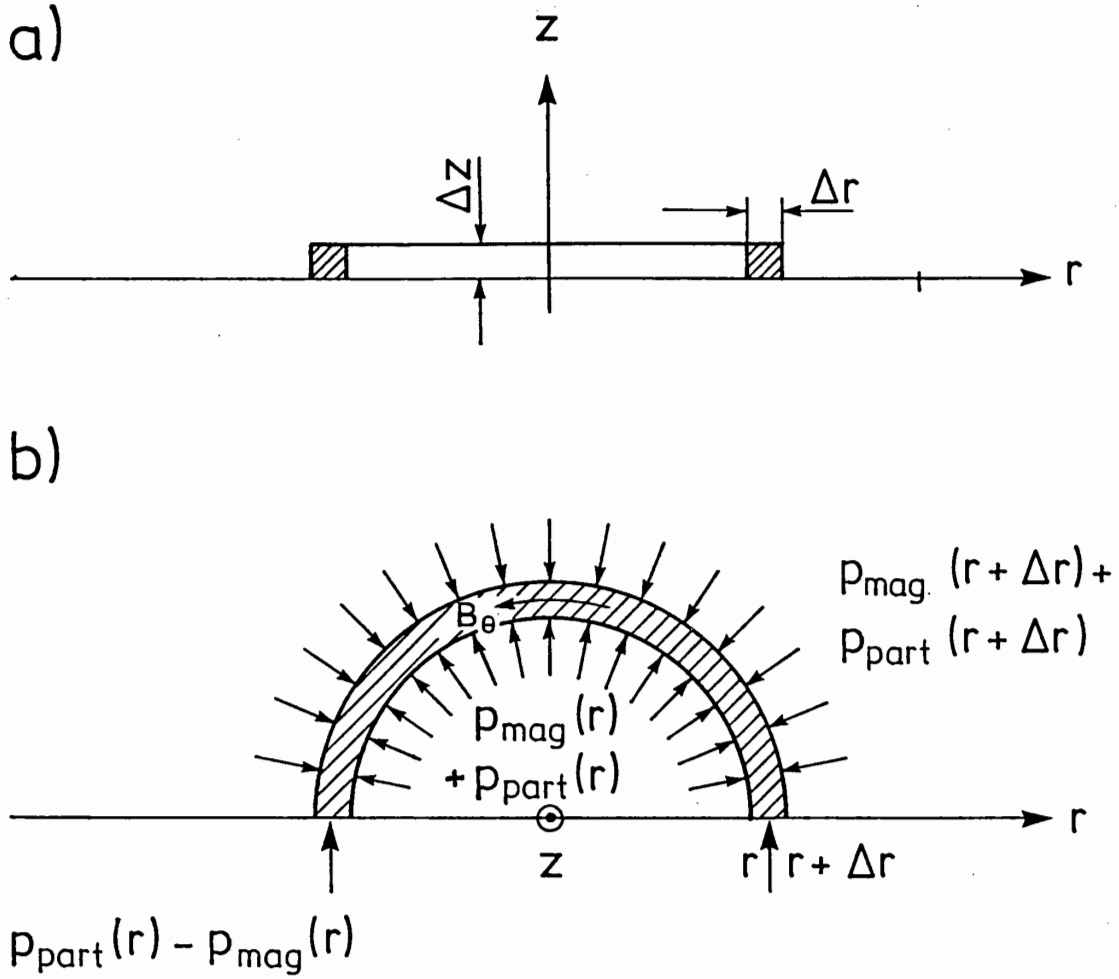

Fig. 5.17. Halvcirkelformet magnetfeltlinierør i en Z-pinch. Rørets tværsnit er $\Delta z \Delta r$, dets indre radius er r, og den ydre radius er $r + \Delta r$, se det lodrette snit a). Snittet b) viser i vandret snit de kræfter, der påvirker røret. Udefra påvirkes det indad af trykket $p_{mag}(r+\Delta r) + p_{part}(r+\Delta r)$, indefra påvirkes det udad af trykket $p_{mag}(r) + p_{part}(r)$. Endelig påvirkes rørets ender opad af trykket $p_{part} - p_{mag}$.

Sættes summen af alle opadrettede kræfter, som fremgår af b), lig summen af alle nedadrettede fås

$$2\Delta z\, r\, \{p_{\mathrm{mag}}(r) + p_{\mathrm{part}}(r)\} + 2\Delta z \Delta r\, p_{\mathrm{part}}(r) =$$

$$2\Delta z(r+\Delta r)\, \{p_{\mathrm{mag}}(r+\Delta r) + p_{\mathrm{part}}(r+\Delta r)\} + 2\Delta z \Delta r\, p_{\mathrm{mag}}(r)\ , \quad (5.60)$$

som efter simple regninger og efter grænseovergangen $\Delta r \to 0$ fører til

$$\frac{d}{dr}\{p_{\mathrm{mag}} + p_{\mathrm{part}}\} + \frac{2p_{\mathrm{mag}}}{r} = 0\ , \quad (5.61)$$

som med $p_{mag} = B_\theta^2(r)/2\mu_o$ og $p_{part} = p$ er identisk med (5.55).

Det kan vises generelt for et vilkårligt volumenelement i et plasma i balance i et magnetfelt, at summen af tryk- og trækkræfter beregnet som ovenfor er nul. Det gælder også i grænsen, hvor $p_{part} = 0$, altså for et vilkårligt volumenelement af et magnetfelt, **B**, for hvilket der gælder $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ og $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. Konceptet med magnetiske trykkræfter vinkelret på feltlinierne og trækkræfter parallelt med feltlinierne er altså generelt gyldigt, og det viser sig at være særdeles nyttigt for mange regninger, også i tilfælde, hvor felterne er tidsvarierende.

Bennett-pinchen er ustabil

Det fremgår af Fig. 15.5.b), at Bennett-pinchens β-værdi på aksen, β_a, er lig 1, hvilket skyldes at B_θ (O) = 0. Dette gælder for alle profiler, der opfylder ligning (5.55). Det vil naturligvis være en fordel for effektproduktionen i en fusionsreaktor at køre med størst mulige β-værdier og gerne nær ved 1; men det viser sig, at jo højere et plasmas β-værdi er, jo større er dets tendens til at blive ustabilt. Z-pinchen er ustabil bl.a. på grund af den af naturen indbyggede høje β-værdi nær aksen i disse konfigurationer.

5.5.3. Kvalitative stabilitetsvurderinger for Z- og θ-pincherne

Z-pinchens ustabilitet

Selv om generelle stabilitetsundersøgelser ligger uden for denne bogs rammer, vil vi her kort komme ind på Z- og θ-pinchers stabilitetsforhold. Vi starter med Z-pinchen, og for at gøre behandlingen så simpel som muligt vælger vi at betragte en pinch, hvor strømmen løber i et tyndt lag på overfladen. En sådan Z-pinch er skitseret på Fig. 5.18.a). I området r < a er partikel-

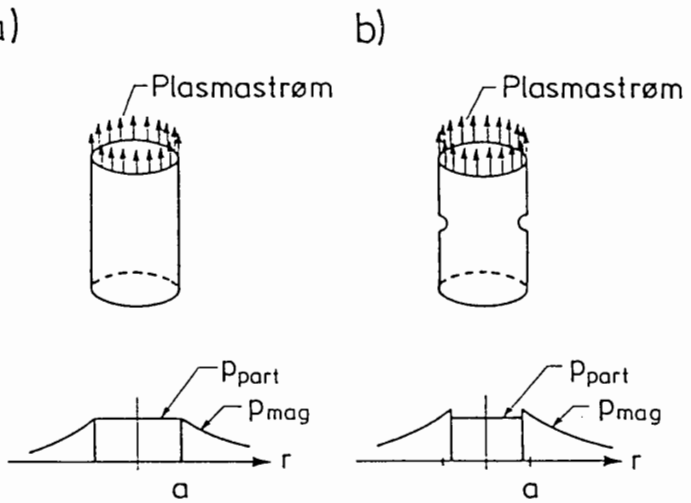

Fig. 5.18. Z-pinchens ustabilitet.
a) Ligevægtssituationen.
b) Bælteformet indsnævring vokser p.g.a. forøget magnetfelttryk på overfladen.

trykket p_{part} = konstant, medens det er nul uden for dette område. For r < a er $p_{mag} = 0$, medens p_{mag} ved r = a springer op til $p_{mag} = p_{part}$, herfra falder p_{mag} proportionalt med r^{-2}. Disse forløb er skitseret nederst på Fig. 5.18.a). Det fremgår direkte, at denne konfiguration er i ligevægt og opfylder (5.61) og derved også (5.55).

Standardproceduren ved stabilitetsundersøgelser er at gå ud fra en ligevægtssituation, som f.eks. den, der lige er vist for en Z-pinch på Fig. 5.18.a). Derefter tænkes ligevægtskonfigurationen perturberet på forskellige måder, og det undersøges om de kræfter, der opstår som følge af perturbationerne, fører til, at perturbationerne vokser eller aftager. Kun hvis **alle** mulige perturbationer aftager, er ligevægtskonfigurationen stabil. Hvis blot én enkelt vokser, er den ustabil, fordi termiske fluktuationer altid vil medføre, at der er et vist indhold af alle perturbationer i plasmaet.

For at vise at Z-pinchen er ustabil, tænker vi os en perturbation, der har form som den bælteformede indsnævring omkring Z-pinchen, som er antydet på Fig. 5.18.b). Da den samlede strøm i pinchen er uændret, får partikeltrykket og magnetfelttrykket i et snit gennem pinchen ved den bælteformede indsnævring det forløb, som er vist nederst på Fig. 5.18.b). Da det indadrettede magnetfelttryk her er større end partikeltrykket, vil indsnævringen vokse, og derfor er Z-pinchen ustabil. Den type instabilitet, der her er diskuteret, kaldes ofte pølseinstabiliteten (eng.: sausage instability). Det ses ved analoge betragtninger, at en perturbation med form som en bælteformet udposning også vil være ustabil.

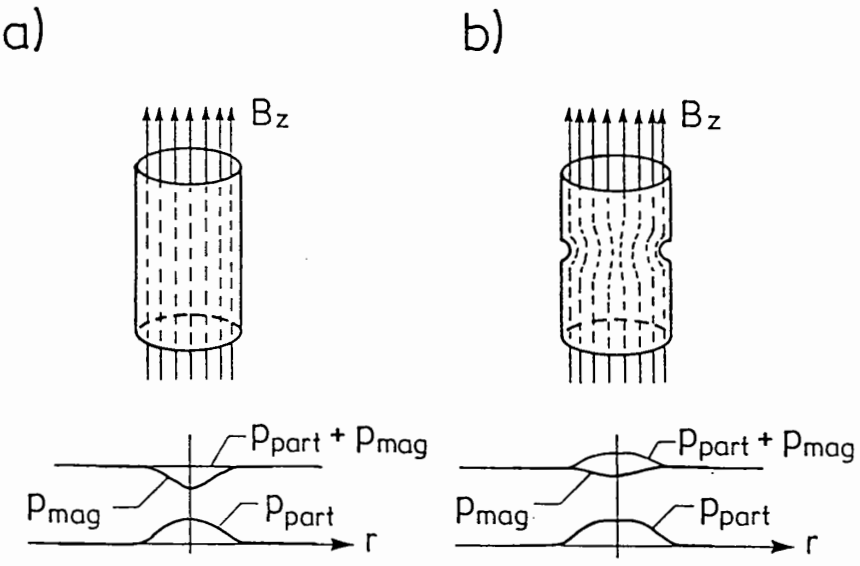

Fig. 5.19. θ*-pinchens stabilitetsforhold.*
a) Ligevægtssituationen.
b) Bælteformet indsnævring aftager p.g.a. forøget udadrettet tryk, $p_{part} + p_{mag}$ *på perturbationens overflade.*

Vi ser nu på θ-pinchen og gennemfører en tilsvarende diskussion af dens stabilitetsforhold. På Fig. 5.19.a) vises øverst selve θ-pinchens ligevægtssituation, medens forløbet af p_{part} og p_{mag} vises nederst. Pinchen er i ligevægt, da det totale tryk, $p_{part} + p_{mag}$, er konstant hen over et tværsnit. På Fig. 5.19.b) er der igen indført en perturbation i form af en bælteformet indsnævring. Da magnetfeltlinierne er "frosset" fast til plasmaet, vil de også bøjes som vist på figuren. Herved forøges magnetfelttrykket inde i plasmaet, og det samlede udadrettede tryk inde i perturbationen, $p_{part} + p_{mag}$, bliver større end det udvendige magnetfelttryk, som vist nederst på figuren. Resultatet bliver, at perturbationen formindskes. Plasmaet er stabilt. Også en udposning vil være stabil, hvilket let viser sig ved brug af analoge argumenter.

På samme måde som θ-pinchen er stabil over for overfladeperturbationer, er også dens toroidale ækvivalent, en plasmaring i et rent toroidalt felt, stabil over for sådanne perturbationer. For en plasmaring i et rent poloidalt felt, der er ækvivalent til Z-pinchen, findes, at også den er ustabil for overfladeperturbationer.

På basis af resultaterne fra ovenstående diskussion og fra afsnit 5.4 kan følgende konkluderes for plasmaer i toroidale konfigurationer: For en plasmaring i et rent poloidalt felt er det let at opnå ligevægtssituationer, men plasmaet er ustabilt for overfladeperturbationer. Omvendt er der ikke ligevægt for et plasma i et rent toroidalt felt, men det er stabilt for overfladeperturbationer. Som allerede nævnt er magnetfeltet i en tokamak en kombination af et toroidalt og et poloidalt felt. I næste afsnit diskuteres skruepinchen, som repræsenterer den udrettede udgave af et almindeligt tokamakplasma, med henblik på at finde dens trykbalanceligning samt stabilitetskriterier for perturbationer på dens overflade.

5.5.4. Skruepinchen

Tager man en plasmaring i en tokamakkonfiguration og tænker sig den rettet ud, får man en situation som skitseret på Fig. 5.20. Et stykke af længden $2\pi R_0$ repræsenterer også her plasmaringen i en tokamak.

Ligevægtsbetingelsen for skruepinchen findes igen ved hjælp af ligningerne (5.5) og (5.6), der løses i det (r,0,z)-cylinderkoordinatsystem, der fremgår af Fig. 5.20.b).

Idet der er fuld symmetri om z-aksen og ingen variation i $\hat{z}$-retningen, følger direkte af $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$, at $B_r = 0$. Feltet har altså formen

$$\mathbf{B}(r) = B_\theta(r)\hat{\theta} + B_z(r)\hat{z}\,, \tag{5.62}$$

der indsat i (5.6) fører til

$$\mu_o \mathbf{j}(r) = -\frac{dB_z}{dr}\hat{\theta} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rB_\theta)\hat{z}\,. \tag{5.63}$$

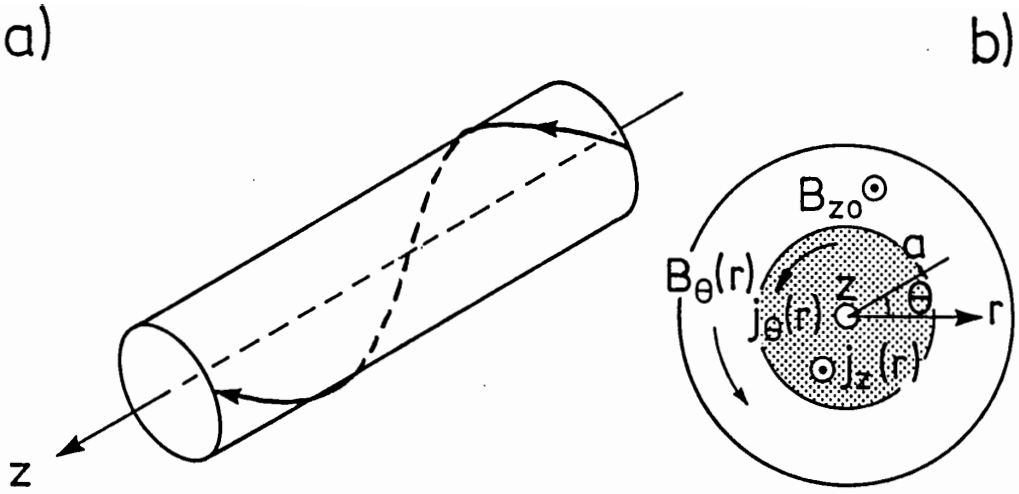

Fig. 5.20. Skruepinch.
a) Perspektivisk snit med skrueformet magnetfeltlinie.
b) Plasmastrengen set fra enden med strømme og felter.

Herefter giver (5.5) kombineret med (5.63)

$$\begin{aligned} \mathbf{j}\times\mathbf{B} &= (j_\theta B_z - j_z B_\theta)\hat{\mathbf{r}} \\ &= -\frac{1}{\mu_o}\left(B_z\frac{dB_z}{dr} + \frac{B_\theta}{r}\frac{d}{dr}(r\,B_\theta)\right)\hat{\mathbf{r}} \\ &= \frac{dp}{dr}\hat{\mathbf{r}}\,, \end{aligned} \tag{5.64}$$

der direkte fører til trykbalanceligningen for skruepinchen

$$\frac{d}{dr}\left(p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_o}\right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_o r} = 0\,. \tag{5.65}$$

Skruepinchens trykbalanceligning

Det fremgår af (5.65), at i skruepinchen er såvel B_z som B_θ normalt med til at holde plasmatrykket i balance, og at deres virkninger optræder som summen af henholdsvis B_z-feltets i θ-pinchen og B_θ-feltets i Z-pinchen. I grænsen $B_\theta \to 0$ går (5.65) direkte over i trykbalanceligningen (5.51) for θ-pinchen, og for $B_z \to$ konstant går den over i trykbalanceligningen (5.55) for Z-pinchen.

Ligning (5.65) indeholder tre funktioner af r: $B_z(r)$, $B_\theta(r)$ og p(r); dvs. der er en dobbelt uendelighed af løsningsmuligheder, idet to af funktionerne kan specificeres, hvorefter den tredie kan bestemmes v.h.a. (5.65). Af (5.65) fremgår også, at konturer med konstant tryk er givet ved r = konstant. Da trykket ifølge (5.23) er konstant langs en magnetfeltlinie, følger det, at de magnetiske fluxlinierør er koncentriske cylindre med cirkulære tværsnit og med aksen

sammenfaldende med z-aksen. En enkelt magnetfeltlinie snor sig i en skruelinie på et fluxlinierør som antydet på Fig. 5.20.a). Analogt med (5.17) defineres skruepinchens sikkerhedsfaktor ved

$$q(r) = \frac{B_z(r)}{B_\theta(r)} \frac{r}{R_o} . \qquad (5.66)$$

Skruepinchens β-værdi, som defineret ved (5.14), afhænger af r og er derfor i sig selv ikke en god parameter til at beskrive magnetfeltets evne til at holde plasmaet indesluttet. Til at beskrive et tokamakplasma benyttes ofte et begreb, der kaldes det poloidale β, som er defineret ved

$$\beta_p = \frac{\langle p \rangle}{B_p^2(a)/2\mu_o} , \qquad (5.67)$$

Poloidalt β, *generelt*

hvor middelværdien af plasmatrykket over et tværsnit i tokamakplasmaet er givet ved

$$\langle p \rangle = \frac{\int_o^a p(r)\, 2\pi r\, dr}{\pi a^2} , \qquad (5.68)$$

og hvor $B_p(a)$ er det polære magnetfelt på plasmaoverfladen ved r = a, altså

$$B_p(a) = \frac{\mu_o I_p}{2\pi a} . \qquad (5.69)$$

Kombination af (5.67) og (5.68) giver

$$\beta_p = \frac{4\mu_o}{B_p^2(a) \cdot a^2} \int_o^a p(r) r\, dr . \qquad (5.70)$$

Bemærk, at definitionen af β_p i (5.67) afviger fra definitionen af β i (5.14) derved, at β_p er defineret som forholdet mellem partikeltryk og det lokale magnetfelttryk i plasmaet, medens β er defineret som forholdet mellem partikeltrykket og summen af det lokale magnetfelttryk og partikeltryk.

For skruepinchen, som vi diskuterer her, tager det poloidale β svarende til (5.70) formen

$$\beta_p = \frac{4\mu_o}{B_\theta^2(a) a^2} \int_o^a p(r) r\, dr , \qquad (5.71)$$

Poloidalt β *for skruepinchen*

som efter en delvis integration bliver

$$\beta_p = -\frac{2\mu_o}{B_\theta^2(a)a^2}\int_o^a \frac{dp(r)}{dr} r^2\, dr\,. \qquad (5.72)$$

Indsættes heri skruepinchens trykbalanceligning (5.65) fås

$$\beta_p = \frac{2\mu_o}{B_\theta^2(a)a^2}\int_o^a \left\{\frac{d}{dr}\left(\frac{B_z^2}{2\mu_o}\right) + \frac{B_\theta}{\mu_o r}\frac{d}{dr}(r\,B_\theta)\right\} r^2 dr\,, \qquad (5.73)$$

som efter simple regninger bliver

$$\beta_p = 1 + \frac{1}{B_\theta^2(a)a^2}\int_o^a \frac{dB_z^2}{dr} r^2\, dr\,. \qquad (5.74)$$

Det fremgår af (5.74), at $\beta_p = 1$, når B_z er konstant over skruepinchens tværsnit. Hvis B_z er større inde i skruepinchen end på overfladen, finder vi, at $\beta_p < 1$, og hvis B_z er mindre i skruepinchen end udenfor, er $\beta_p > 1$. Figur 5.21 viser en række karakteristiske r-profiler af B_z, B_θ, j_z, j_θ, p og q i fire forskellige skruepinchkonfigurationer.

Karakteristiske skruepinchprofiler

Figur 5.21 b) svarer til $\beta_p = 1$. I denne situation er B_z konstant over hele plasmasøjlens tværsnit og lig det ydre påtrykte B_{zo}-felt. Plasmaet holdes i balance alene af det B_θ-felt, som skabes af plasmastrømtætheden j_z. Balancemæssigt svarer situationen helt til Z-pinchen som diskuteret i afsnit 5.5.2. Bemærk, at med B_z = konstant går skruepinchens balanceligning (5.65) over i balanceligningen (5.55) for Z-pinchen. For at opnå B_z = konstant kræves $j_\theta = 0$. Der findes forskellige mekanismer, som genererer θ-komponenter af strømtætheden i plasmasøjlen. For det første vil plasmaets diamagnetiske virkning generere en diamagnetisk strømtæthed, som for den rene θ-pinch er givet ved ligning (5.50). Den diamagnetiske strøm står vinkelret på magnetfeltlinierne og har derfor også en θ-komponent i en skruepinch. For det andet genereres der strømtætheder i plasmaet på grund af ∇B-driften, som er behandlet i underafsnit 3.2.5. Disse strømtætheder står ifølge ligning (3.28) også vinkelret på **B**-feltet, og de har derfor også en θ-komponent. For det tredie genereres strømtætheder i plasmaet på grund af $\mathbf{K}\times\mathbf{B}$-driften, som er behandlet i underafsnit 3.2.4. Disse strømtætheder står også vinkelret på **B**-feltet og har dermed θ-komponenter. Endelig vil plasmastrømmen I_z, når den er genereret i plasmaet ved hjælp af et elektrisk felt, have en tendens til at følge de skrueformede magnetfeltlinier, hvilket igen giver en θ-komponent i strømtætheden. Det er summen af alle disse j_θ-komponenter, der for en $\beta_p = 1$ konfiguration er lig nul.

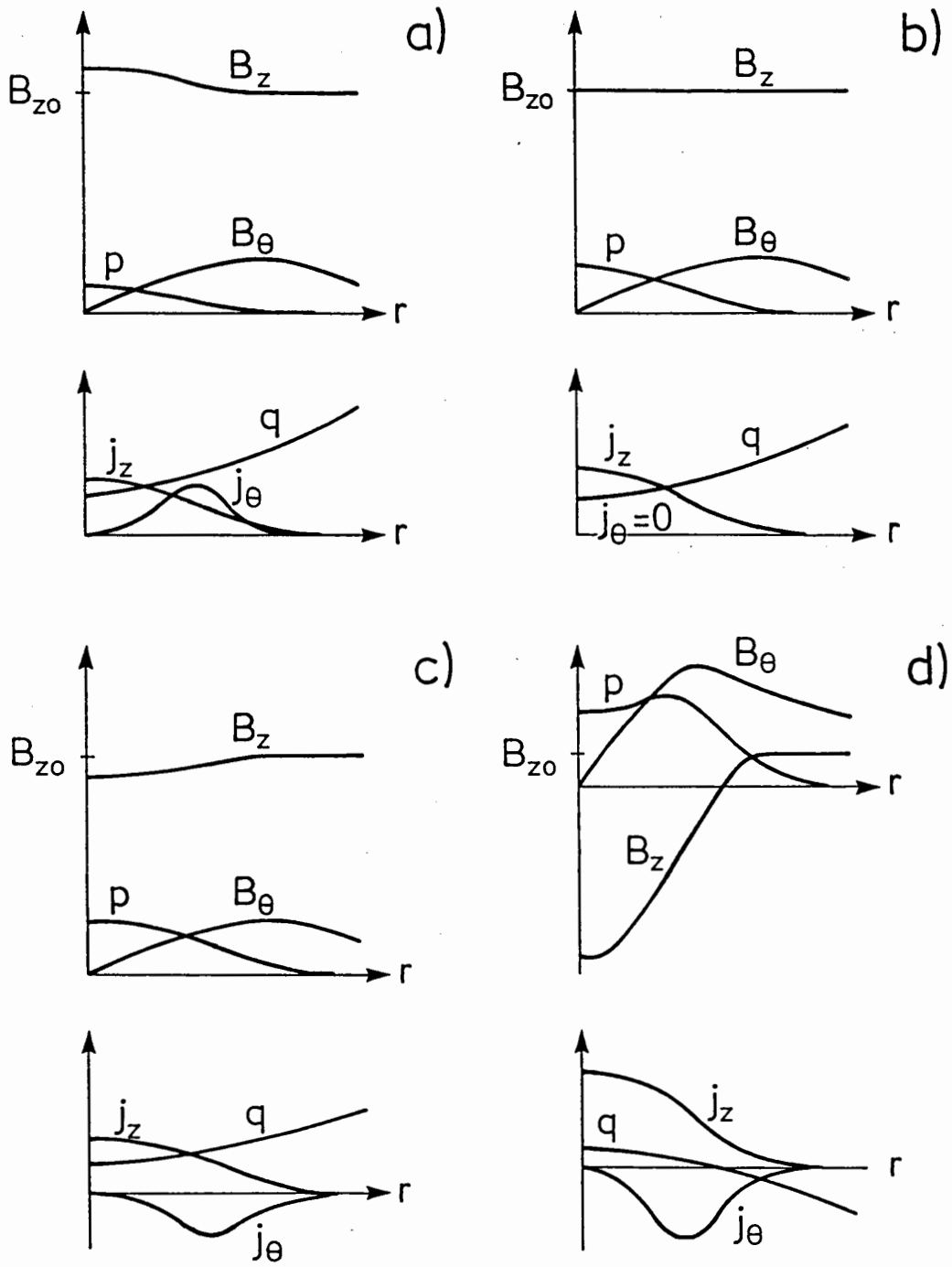

Fig. 5.21. Karakteristiske r-afhængigheder af B_z , B_0 , j_z , j_θ , p og q i forskellige skruepinchkonfigurationer
a) $\beta_p < 1$, konventionel tokamak
b) $\beta_p = 1$, konventionel tokamak
c) $\beta_p > 1$, høj-β tokamak
d) RFP-konfiguration.

Situationen på Fig. 5.21.a) med $\beta_p < 1$ afviger fra $\beta_p = 1$-situationen på Fig. 5.21.b) ved, at B_z inde i plasmaet er større end B_{zo} uden for plasmasøjlen. Desuden er plasmatrykket mindre i a) end i b). I a)-situationen holdes plasmaet igen sammen af B_θ-feltet, men da plasmatrykket er mindre end i b), kan B_θ-feltet klare at holde sammen på mere end plasmatrykket. For at få balance er B_z-feltet derfor komprimeret inde i plasmaet. Det forøgede B_z-felt i plasmaet dannes ved et j_θ, der er forskelligt fra 0 og har et sådant fortegn, at det forøger B_z inde i plasmaet. Også her dannes det endelige j_θ som summen af j_θ-komponenterne af de strømmekanismer, der lige er omtalt under diskussionen af Fig. 5.21.b).

På Fig. 5.21.c), hvor $\beta_p > 1$, er plasmatrykket større end i b). Plasmaet holdes nu i balance af både B_θ-feltet og B_z-feltet. For B_z-feltets vedkommende opnås virkningen ved, at B_z-feltet svækkes inde i plasmaet som ved den almindelige diamagnetiske virkning, der er diskuteret i underafsnit 5.5.1. Svækkelsen i B_z-feltet inde i plasmaet opnås ved, at j_θ-strømmen nu løber i den negative θ-retning.

Reversed Field Pinch

I toroidal form svarer Fig. 5.21.a) og b) til almindelige tokamakkonfigurationer, der arbejder med $\beta_p \lesssim 1$, medens c) svarer til høj-β tokamakker. Konfigurationen i d) kaldes en RFP-konfiguration (**R**eversed **F**ield **P**inch). Her er plasmatrykket yderligere forøget. Trykbalancen opnås dels ved et forøget B_θ-felt, og dels ved en så kraftig reduktion i det ydre påtrykte B_{zo}-felt inde i plasmaet, at retningen skiftes. Retningsændringen i B_z-feltet inde i plasmaet opnås ved en stor j_θ-komponent i $-\theta$-retningen.

RFP-konfigurationen er på mange måder interessant, og der udføres store eksperimenter for at undersøge, om den kan udvikles til fusionskonfigurationer. Det ligger imidlertid uden for denne bogs område at diskutere RFP-eksperimenter. Interesserede henvises til f.eks. [13].

5.5.5. Kvalitative stabilitetsvurderinger for skruepinchen

I underafsnit 5.5.4 diskuteredes skruepinchens ligevægtsforhold. Balanceligningen (5.65) blev udledt, og forskellige fysiske forhold, der betinger skruepinchens ligevægt, blev diskuteret. I dette afsnit ser vi på skruepinchens stabilitet for små overfladeperturbationer af samme type, som blev diskuteret for Z- og θ-pinchen i underafsnit 5.5.3. Det vil blive vist, at skruepinchen under visse forhold forener θ-pinchens stabilitet mod overfladeperturbationer med Z-pinchens gode ligevægtsegenskaber.

Vi betragter en del af en skruepinch, som vist på Fig. 5.22.a) i sin uforstyrede ligevægtsstilling. For nemheds skyld vælger vi en skruepinch med $\beta_p = 1$, hvor B_z-feltstyrken er konstant over et tværsnit af plasmasøjlen og lig det ydre påtrykte B_{zo}-felt. Vi vælger også, som under diskussionen af Z-pinchens stabilitet i underafsnit 5.5.3, en situation, hvor strømmen løber i et tyndt lag på overfladen. I området $r < a$ er partikeltrykket p_{part} = konstant, medens

det er nul for r > a. Magnetfelttrykket, $p_{mag,\theta}$, der skyldes B_θ-feltet, er nul for r < a, ved r = a springer $p_{mag,\theta}$ op til værdien p_{part} og aftager for r > a som r^{-2}. Magnetfelttrykket, $p_{mag,z}$, der skyldes det konstante B_z-felt, er som vist uafhængigt af r.

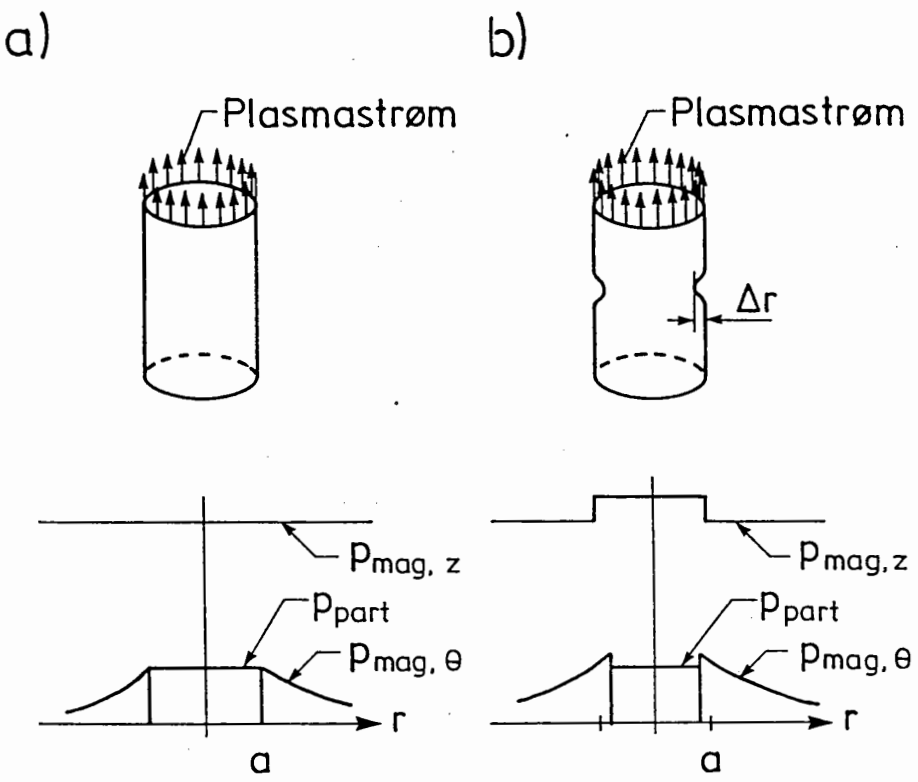

Fig. 5.22. Skruepinchens stabilitet.
a) Ligevægtstilstanden
b) Ved en bælteformet indsnævring forøges B_z-feltets udadrettede tryk samtidig med, at B_θ-feltets indadrettede tryk også forøges.

På Fig. 5.22.b) er der på skruepinchen vist en perturbation i form af en bælteformet indsnævring af dybden Δr. I et tværsnit af skruepinchen gennem perturbationen ændres trykforholdene og bliver som vist nederst på figuren. Det indadrettede $p_{mag,\theta}$-tryk på overfladen af perturbationen er her $\Delta p_{mag.\theta}$ større end det udadrettede partikeltryk p_{part}. I forhold til den uperturberede situation er B_z-magnetfelttrykket inde i plasmasøjlen nu steget med $\Delta p_{mag,z}$. Denne forøgelse skyldes, at den totale B_z-flux holder sig uændret i et plasma, der beskrives ved ideal MHD. Betingelsen for, at skruepinchen er stabil mod denne perturbation, er

$$\Delta p_{mag.\theta} < \Delta p_{mag.z} \qquad (5.75)$$

Til bestemmelse af ændringerne i B_θ-magnetfelttrykket haves, når plasmaoverfladen er flyttet fra a til r,

$$p_{mag.\theta}(r) = p_{mag.\theta}(a) \cdot \frac{a^2}{r^2} , \qquad (5.76)$$

der efter differentation giver

$$\Delta p_{\mathrm{mag}.\theta} = p_{\mathrm{mag}.\theta}(a)\frac{2\Delta r}{a} . \qquad (5.77)$$

Fluxbevaring over plasmasøjlen for B_z-feltets vedkommende giver

$$p_{\mathrm{mag}.z}(a) \cdot a^4 = p_{\mathrm{mag}.z}(r) \cdot r^4 , \qquad (5.78)$$

som efter differentation giver

$$\Delta p_{\mathrm{mag}.z} = \frac{4\Delta r}{a} p_{\mathrm{mag}.z}(a) . \qquad (5.79)$$

Stabilitetsbetingelsen (5.75) er opfyldt når

$$p_{\mathrm{mag}.\theta} \langle 2p_{\mathrm{mag}.z} , \qquad (5.80)$$

eller når

Skruepinchens stabilitetsbetingelse

$$B_\theta(a) \langle \sqrt{2}\, B_{zo} . \qquad (5.81)$$

Resultatet (5.81) viser, at en skruepinch vil være stabil over for overfladeperturbationer, hvis blot B_{zo} er tilstrækkelig stor i forhold til $B_\theta(a)$. Når (5.81) er opfyldt, vil kompressionen af B_z-feltet yde et større modtryk mod perturbationen end det tryk, hvormed forøgelsen af $p_{\mathrm{mag}.\theta}$ vil påvirke perturbationen i retning af en forøgelse. For mere komplicerede forløb af B_z, B_θ og **j** kan tilsvarende, men langt mere komplicerede beregninger gennemføres, men resultatet bliver altid, at et tilstrækkeligt stærkt B_z-felt i forhold til $B_\theta(a)$ vil stabilisere en skruepinch mod overfladeperturbationer.

Vender vi os nu igen til skruepinchens toroidale ækvivalent tokamakken, vil vi finde, at et stærkt toroidalt felt i forhold til det poloidale felt vil stabilisere et tokamakplasma mod overfladeperturbationer. I praksis viser det sig, at betingelsen for stabilitet er at sikkerhedsfaktoren

$$q(a) = \frac{B_t}{B_p}\frac{a}{R_o} \geq 3 . \qquad (5.82)$$

Tokamakplasmaets tendens til at udvide sig i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen kompenseres af den poloidale komponent af magnetfeltet på samme måde, som er diskuteret i afsnit 5.4 i forbindelse med Fig. 5.12.

Resultatet er, at ved at arbejde med en tokamakkonfiguration med $q(a) \geq 3$ vil den toroidale komponent af **B**-feltet stabilisere mod overfladeperturbatio-

nen, medens den poloidale komponent af **B**-feltet kan kompensere plasmaringens tendens til at udvide sig i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen.

5.6. Generelle Bemærkninger om Tokamakkonfigurationens Ligevægt og Stabilitet

I de foregående afsnit 5.3 og 5.4 har vi behandlet toroidale konfigurationers ligevægtssituationer ved brug af kvalitative argumenter, og derved opnået en fysisk forståelse af de kræfter, der betinger ligevægten. I afsnit 5.5 så vi på simplere systemer, nemlig de udrettede versioner af 3 forskellige typer toroidale plasmaringe. For disse én-dimensionale pincher var vi i stand til at udlede kvantitative udtryk for trykbalancen i $\hat{\mathbf{r}}$-retningen. Vi vil nu bruge resultaterne fra de foregående afsnit til nogle generelle betragtninger over tokamakkonfigurationens ligevægt og stabilitet.

Tager man en skruepinch af længden $2\pi R_0$ og dens B_z-felt og bøjer dem sammen i en ring, får man et tokamakplasma. Det er klart, at trykbalanceligningen (5.65), der giver betingelsen for skruepinchens trykbalance i $\hat{\mathbf{r}}$-retningen, ikke kan gælde exact for et tokamakplasma. For det første har vi, at medens skruepinchens påtrykte B_z-felt er konstant hen over et tværsnit af pinchen, så varierer det tilsvarende toroidale B_t-felt i tokamakplasmaet med R som udtrykt i formel (5.31). For det andet bevirker sammenbøjningen af skruepinchen, at dens B_θ-felt komprimeres i området $R < R_0$ og expanderes for $R > R_0$, således at tokamakplasmaet umiddelbart vil få et stærkere poloidalt felt for $R < R_0$ end for $R > R_0$. Dette forholds betydning for plasmaringens tendens til udvidelse i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen er allerede nævnt i afsnit 5.4. Begge de to her nævnte grunde til, at (5.65) ikke er en exakt trykbalanceligning for et tokamakplasma, er små for plasmaer med små værdier af det inverse aspektforhold $\varepsilon = a/R_0$, og i grænsen $\varepsilon \to 0$ gælder (5.65) også for en plasmaring. Ved beregninger af trykbalancen i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen for et tokamakplasma betaler det sig at bruge ε som en ekspansionsparameter, hvorved der opnås korrektionsled til (5.65), der er af størrelsesordenen ε^1, ε^2 osv.

Stabilitetsundersøgelse, generel procedure

Den således modificerede trykbalanceligning, der gælder for tokamakfigurationen, bruges til stabilitetsundersøgelser af samme type, som den vi behandlede i underafsnit 5.5.5. Den generelle fremgangsmåde er, at man vælger en konfiguration, der er i balance, og undersøger perturbationer af formen

$$\xi(\mathbf{r}) = \xi_a(\mathbf{r}) \exp\left[i(m\theta + n\phi - \omega t)\right] \tag{5.83}$$

ved hjælp af ligningerne for ideal MHD (4.87) til (4.92). I (5.83) er $\xi(\mathbf{r})$ en lille forskydning i $\hat{\mathbf{r}}$-retningen af det plasmaelement, der i ligevægtssituationen befinder sig i $\mathbf{r}$. $\xi_a(\mathbf{r})$ er en komplex amplitude af en perturbation med m

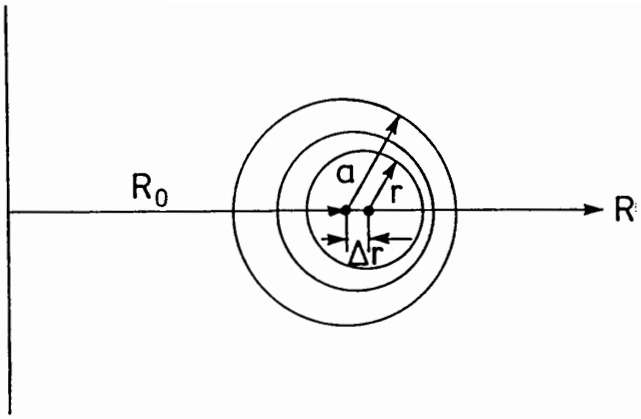

Fig. 5.23. Grad-Shafranov-forskydningen.

bølgelængder i $\hat{\theta}$-retningen og med n i $\hat{\varphi}$-retningen. Kun hvis der ikke findes (n,m)-værdier, som fører til ω-værdier med Im $\omega > 0$, er konfigurationen stabil. Som resultat af sådanne undersøgelser finder man igen, at en nødvendig betingelse for stabilitet er, at q er tilstrækkelig stor, hvilket i de fleste tilfælde vil sige omkring 3.

Grad-Shafranov-forskydningen

I en tokamak kompenserers plasmaets tendens til at udvide sig i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen ved, at det poloidale felt forstærkes på ydersiden af plasmaet (for $R > R_0$) og svækkes på indersiden (for $R < R_0$). Det forøgede poloidale magnetfeltstryk, der herved opstår ved store R-værdier, er netop i stand til at opretholde intern trykbalance i plasmaet i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen. Et karakteristisk forløb af B_p-linierne i et poloidalt snit gennem et plasma med cirkulær profil er vist på Fig. 5.23. Plasmaets overflade ligger på en cirkel med centrum i $R = R_0$ og med radius a. Inde i plasmaet danner de poloidale feltlinier også næsten cirkulære konturer; men en cirkel med radius r har sit centrum forskudt Δr i den positive $\hat{\mathbf{R}}$-retning. Δr kaldes normalt Grad-Shafranov-forskydningen efter de forskere, der først har beregnet den. Δr(r) lader sig lettest beregne ved hjælp af fluxfladestørrelserne (5.27) til (5.30), som er nævnt i afsnit 5.3. For en gennemgang af beregningerne af Δr(r) kan henvises til [13] og [14].

Elongerede tværsnit

I mange tilfælde arbejder man med tokamakplasmaer, der har elongerede tværsnit i det poloidale plan. JET er et eksempel på dette. På Fig. 5.24 vises et karakteristisk poloidalt snit gennem et JET-plasma, der har en D-formet kontur. Fordelene ved elongerede plasmaer er, dels at de udnytter det forhåndenværende volumen bedre, og dels at det viser sig, at de har visse fordele, hvad ligevægt og stabilitet angår.

Tokamakkens dårlige magnetfeltøkonomi

Det fremgår af skruepinchens trykbalanceligning (5.65) og specielt af diskussioner i forbindelse med Fig. 5.21, at det i al væsentlighed er det poloidale felt, der er ansvarligt for at holde et tokamakplasma sammen. Det toroidale felts opgave er primært at sørge for stabilitet, hvilket som nævnt kræver, at $q \gtrsim 3$. De fleste tokamakplasmaer har et inverst aspektforhold, ε, der er af

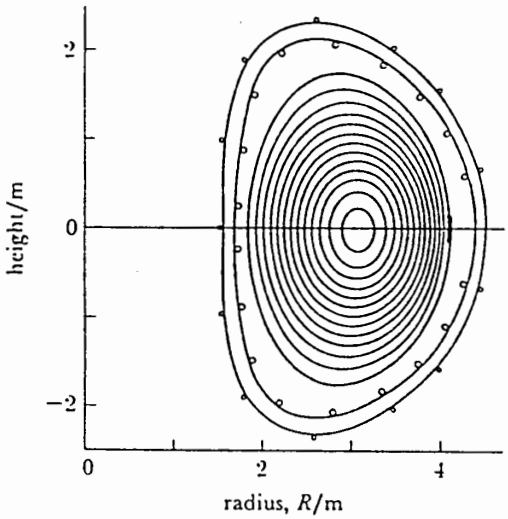

Fig. 5.24. Elongeret JET-plasma.

størrelsesordenen 1/3 eller mindre. Ved brug af (5.17) ser man, at det toroidale felt må være ca. 10 gange så stærkt som det poloidale. Det betyder, at magnetfeltmæssigt er en tokamak en meget uøkonomisk maskine, idet kun ca. 1% af den magnetiske energi, der er i reaktorkammeret er med til at holde plasmaet indesluttet. Det er derfor væsentligt for økonomien i en tokamak-fussionsreaktor, at det toroidale felt genereres så billigt og tabsfrit som muligt, dvs. superledende spoler er en nødvendighed.

Ikke-ideal MHD-effekter

Beregningerne og vurderingerne af toroidale plasmaers ligevægts- og stabilitetsforhold i dette kapitel har alle været baseret på ligningerne for ideal MHD (4.87) til (4.92). Disse ligninger er, som diskuteret i kapitel 4, ikke eksakte. De opnåede resultater kan derfor heller ikke forventes at være eksakte, men det kan håbes, at de er gode approximationer. I praksis viser det sig, at konfigurationer, som ud fra ideal MHD forventes at være i stabile ligevægtssituationer, faktisk er stabile eller nær ved at være det. Ønsker man at udføre mere nøjagtige beregninger end dem, der er baseret på ideal MHD, vil man ofte angribe problemet på den måde, at man først finder en stabil ligevægtssituation ved hjælp af ideal MHD. Denne konfiguration undersøger man så mere dybtgående ved at tage de led i betragtning, som er negligerede i udledningen af ideal MHD-ligningerne, og som er mest farlige for den konfiguration, man behandler. Ofte finder man, at konfigurationer, der er ideal MHD-stabile også er stabile, når de negligerede led medtages. Hvis disse negligerede led fører til manglende stabilitet, vil instabiliteterne som hovedregel vokse langsomt. Ideal MHD er altså et godt sæt værktøj til at opnå et overordnet indtryk af, om en konfiguration er stabil eller ej.

Kollisionseffekter

En af de væsentligste effekter, der er negligeret ved udledningen af ligningerne for ideal MHD, er virkningen af binære kollisioner mellem de ladede partikler. Det fører bl.a. til, at et plasma, der er beskrevet ved ideal MHD, har

en uendelig ledningsevne, som igen fører til, at magnetfelter ikke kan trænge ind i plasmaet. I praksis sker der naturligvis kollisioner i et plasma, og de vil have betydning for en plasmakonfigurations stabilitet og indeslutning. I næste kapitel diskuterer vi den betydning, som kollisioner har for diffusionen af et tokamakplasma vinkelret på magnetfeltlinierne.

6. PLASMADIFFUSION

I dette kapitel behandles diffusion af plasma vinkelret på feltlinierne i det magnetfelt, hvori plasmaet er indesluttet. Plasmadiffusion er en proces, der er betinget af kollisioner mellem de ladede partikler. Plasmadiffusion er derfor ikke omfattet af ligningerne for ideal MHD, som jo er udledt under antagelsen om, at kollisioner kan negligeres. Vi vil betragte plasmaer, som behandlet ved brug af ligningerne for ideal MHD findes at være i stabil ligevægt. Sådanne plasmaer kan altså i princippet holdes indesluttet i magnetfeltet i ubegrænsede tider; men når diffusion tages med i betragtning, er indeslutningen ikke mere perfekt. Vi skal vurdere, hvor effektivt fusionsplasmaer kan holdes indesluttet, når diffusionsprocesser tages med i betragtning.

6.1. Generelt om Diffusion

Diffusion er en mekanisme, hvorved molekyler eller atomer af et stof kan trænge ind i eller gennem et område, der er fyldt med andet stof, eller som på anden måde hindrer indtrængningen. Kendte eksempler på diffusion er

a) Gassers eller væskers diffusion gennem porøse vægge.
b) Neutroners diffusion fra brændselselementerne i fissionsreaktorer ud i moderator- og afskærmningsmaterialet.
c) I tilstrækkelig stille vejr ser man, at røgfanen fra en skorsten breder sig ud og bliver tykkere og tykkere på grund af diffusion af røgpartiklerne ud i den omgivende luft.

Diffusionsmekanismen

Den fysiske mekanisme, der fører til transport af partikler ved diffusion, er den samme i de tre nævnte eksempler: De enkelte partikler i det diffunderende medium bevæger sig frit i deres termiske bevægelser mellem stød mod det materiale, hvori de diffunderer. Gas- eller væskepartiklerne rammer væggene i de små sprækker, der er i det porøse materiale. Neutronerne støder mod de fastsidende atomer i afskærmningsmaterialet, og røgpartiklerne støder mod molekylerne i den atmosfæriske luft, som de sendes ud i. Ved et stød ændrer de diffunderende partikler retning og måske fart, deres baner får altså zig-zag form, frem og tilbage i det omgivende medium uden nogen foretrukken retning. En sådan bevægelse, der er sammensat af retlinede skridt med tilfældig længde og retning, kaldes en random walk bevægelse. At der kan opstå en resulterende transport af de diffunderende partikler, når hver af dem ikke bevæger sig i nogen foretrukken retning, skyldes, at der er en gradient i

tætheden af disse partikler. Transporten er i den retning, hvor tætheden falder. Det indses let ved følgende argument: Læg en tænkt væg ind i området, hvor diffusionen foregår. Lad væggen stå vinkelret på gradienten i tætheden af de diffunderende partikler. Væggen vil blive passeret fra begge sider af partiklen, der bevæger sig i deres random walk baner. Da væggen passeres af flere partikler fra den side, hvor tætheden er høj, end fra den side, der har lavere tæthed, får vi en nettotransport af partikler gennem væggen i den retning, der peger mod aftagende tæthed, altså i $-\nabla n$-retningen.

Diffusion beskrives matematisk ved diffusionsligningen

$$\mathbf{J} = n\mathbf{u} = -D\nabla n \,. \tag{6.1}$$

Definitionsligning for diffusionskoefficienten

J er nettoantallet af diffunderende partikler, der pr. tidsenhed passerer en arealenhed lagt vinkelret på ∇n-retningen, n er den lokale tæthed af de diffunderende partikler, og **u** er den lokale diffusionsbestemte strømningshastighed af disse partikler. Diffusionskoefficienten, D, er et mål for, hvor hurtigt diffusionen foregår. For et givet diffusionsproblem kan D afhænge af mange forhold som f.eks. temperatur og masse af de diffunderende partikler, kollisionstværsnittene for stød mellem de diffunderende partikler og molekylerne i baggrundsmaterialet, samt baggrundsmaterialets tæthed.

I Appendiks 5 er vist en udregning af diffusionskoefficienten for en meget simplificeret random walk diffusionsproces, og det er anført, at diffusionskoefficienten for mere realistiske fysiske systemer har samme generelle form, nemlig

$$D = U(\Delta r)^2 \cdot \nu \,, \tag{6.2}$$

Generel formel for diffusionskoefficienten

hvor (Δr) er længden af et karakteristisk vejstykke som en diffunderende partikel bevæger sig mellem to stød, og ν er partiklens stødfrekvens. U er en talkonstant af størrelsesordenen én. I den fænomologiske behandling af plasmadiffusion i magnetfelter i dette kapitel vil vi benytte ligning (6.2) med U = 1 som udtryk for diffusionskoefficienten.

Det er værd at bemærke, at transport af partikler i medier, der hæmmer partikelbevægelsen, kan skyldes andre mekanismer end den form for diffusion, vi lige har diskuteret. Ser vi igen på eksemplet c) med røg fra en skorsten, får vi kun dannet en lang/høj røgfane, hvis en langsom, laminart flydende vind fører den udsendte røg væk fra skorstenen. Den form for transport kaldes ofte konvektion. Den diffusionsbetingede udbredning af selve røgfanen vil pludselig kunne blive meget kraftig, hvis den laminart strømmende vind skifter karakter og bliver turbulent. Når det sker, spredes røgpartiklerne så kraftigt, at røgen kun ses ganske tæt ved skorstensmundingen. Denne stærkt forøgede diffusion kaldes turbulent diffusion.

Både den klassiske kollisionsforårsagede diffusion, transport ved konvektion og turbulent diffusion er kendte fænomener i plasmafysikken. Her kon-

centrerer vi os om den kollisionsforårsagede diffusion. Et eksempel på turbulent diffusion er nævnt i afsnit 6.4.

Ved løsning af praktiske diffusionsproblemer betaler det sig ofte at kombinere definitionsligningen for diffusionskonstanten (6.1) med en kontinuitetsligning for de diffunderende partikler af typen (4.32). Herved fremkommer en ligning som

$$\frac{\partial n(\mathbf{r},t)}{\partial t} = D\nabla^2 n(\mathbf{r},t)\,. \qquad (6.3)$$

I sin form er (6.3) helt ækvivalent med varmeledningsligningen, som er diskuteret i detaljer i mange matematikbøger.

6.2. Diffusion af Plasma i Homogent Magnetfelt. Klassisk Diffusion

I dette afsnit ser vi på diffusion af plasmapartikler vinkelret på feltlinierne i et homogent magnetfelt, hvori de er indesluttet. I første underafsnit, 6.2.1, gennemfører vi en fænomenologisk behandling og opnår en forståelse af de fysiske forhold, der forårsager diffusionen. Vi ser på ændringerne i de enkelte partiklers baner, når de udsættes for stød, og ud fra disse betragtninger udleder vi et udtryk for diffusionskoefficienten. I underafsnit 6.2.2. beregner vi diffusionskoefficienten ud fra fluidligningerne og viser, at et plasmas diffusion også kan opfattes som en $\mathbf{K}\times\mathbf{B}$-drift, hvor $\mathbf{K}$ er gnidningskraften mellem ionernes og elektronernes diamagnetiske strømme. Endelig vises i sidste underafsnit, at den klassiske diffusion i et plasma ikke er så stor, at den vil kunne hindre opfyldelse af Lawson-kriteriet.

6.2.1. Diffusion forårsaget af kollisioner

Stødinduceret diffusion i homogent magnetfelt

For at få en forståelse af de fysiske forhold, der betinger diffusionen i et plasma, ser vi på Fig. 6.1. Her har vi en plasmapartikel med massen m og ladning q i et homogent magnetfelt $\mathbf{B}_0$, som peger ud af papirets plan. Som diskuteret i underafsnit 3.2.2 bevæger partiklen sig i en skrueformet bane, hvis projektion på en plan vinkelret på magnetfeltet er en cirkel. På figuren kaldes denne cirkel C, den har centrum i $\mathbf{r}$, og dens radius, r_c, er givet ved (3.10). Medens partiklen bevæger sig rundt i sin gyrobane, ligger dens gyrocenter stille. Vi kan betragte gyrocentret som partiklens middelposition og har da, at partiklen i middel ikke flytter sig i retningen vinkelret på magnetfeltet.

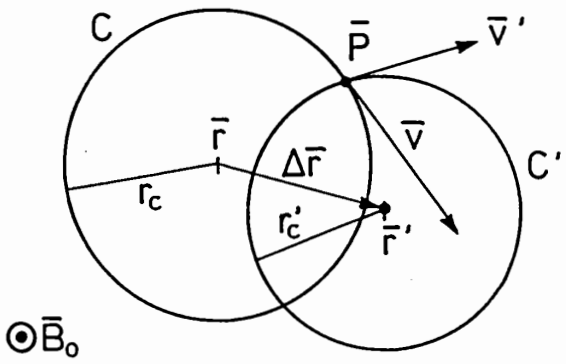

Fig. 6.1. Gyrocentret for en ladet partikel i et homogent magnetfelt springer under et stød.

Vi tænker os nu, at partiklen, når den er i punktet **P** i sin bane, støder ind i en neutral partikel. Under stødet ændres partiklens hastighed pludseligt fra **v** til **v'**, og partiklen roterer efter stødet omkring et nyt gyrocenter **r'**, som nu bliver partiklens middelposition indtil næste stød. Gyrocentrets spring, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r'}-\mathbf{r}$ vil karakteristisk være af størrelsesordenen $r_c \simeq r_c'$. Den ladede partikels stød mod neutrale partikler får altså dens gyrocenter og dermed dens middelposition til at udføre en random walk bevægelse i et plan vinkelret på feltlinierne. (6.2) giver os derfor for diffusionskoefficienten

$$D_\perp \approx (r_c)^2 \cdot \nu \,, \tag{6.4}$$

hvor r_c er en karakteristisk værdi for de difunderende partiklers gyroradius, og ν er deres kollisionsfrekvens mod de neutrale partikler.

Der er en ikke uvæsentlig forskel mellem diffusion af ladede partiklers gyrocentre i et magnetfelt og de random walk diffusionsprocesser, der blev diskuteret i afsnit 6.1 og i Appendiks 5. I afsnit 6.1 så vi på partikler, der mellem to stød bevæger sig frit, hvorved skridtlængden i deres random walk proces bliver produktet af deres hastighed og ν^{-1}. For sådanne partikler finder vi (se A.5.7), at $D \to \infty$ når $\nu \to 0$. Stød hindrer diffusionen, jo større stødfrekvens, jo langsommere diffusion. For plasmapartikler i et homogent magnetfelt er det anderledes. I tiden mellem to stød bevæger partiklernes middelposition, dens gyrocenter, sig ikke. I selve kollisionsøjeblikket springer gyrocentrene et stykke, Δr, som er uafhængigt af, hvornår sidste kollision fandt sted. Kollisionerne forårsager diffusionen; jo større stødfrekvens, des hurtigere diffusion. Når (6.2) alligevel kan benyttes til at beregne diffusionskoefficienten for begge tilfælde, er forklaringen jo blot, at i første tilfælde er Δr proportional med ν^{-1}, medens Δr i plasmatilfældet er uafhængig af ν.

I det foregående har vi forklaret visse simple træk ved ladede partiklers diffusion vinkelret på homogene magnetfelter ved at lade den støde mod neutrale partikler. I et varmt plasma er der ingen neutrale partikler til stede,

og alle stød er mellem ladede partikler. Vi vil nu diskutere gyrocentrenes spring ved kollision mellem ladede partikler i et homogent magnetfelt og ved hjælp af resultatet udlede diffusionskoefficientens afhængighed af plasmaparametrene.

Diffusion ved stød mellem to ladede partikler

Vi ser på to ladede partikler, der bevæger sig i et homogent magnetfelt. Den ene har massen m_1, ladningen q_1, hastigheden $\mathbf{v}_1$, og dens gyrocenter ligger i $\mathbf{r}_1$. Tilsvarende har den anden partikel massen m_2, ladningen q_2, hastigheden $\mathbf{v}_2$, og dens gyrocenter ligger i $\mathbf{r}_2$. Figur 6.2 viser situationen på et tidspunkt, hvor begge partikler i deres gyrobevægelser er kommet meget nær til punktet **P**. I punktet **P** støder partiklerne sammen, hvorved de ændrer hastighed. Lige efter stødet, medens de endnu er meget nær ved **P**, har den første partikel hastigheden $\mathbf{v}_1'$, og den anden $\mathbf{v}_2'$ Under stødet er de to gyrocentre sprunget til henholdsvis $\mathbf{r}_1'$ og $\mathbf{r}_2'$, hvor de ligger fast indtil næste stød.

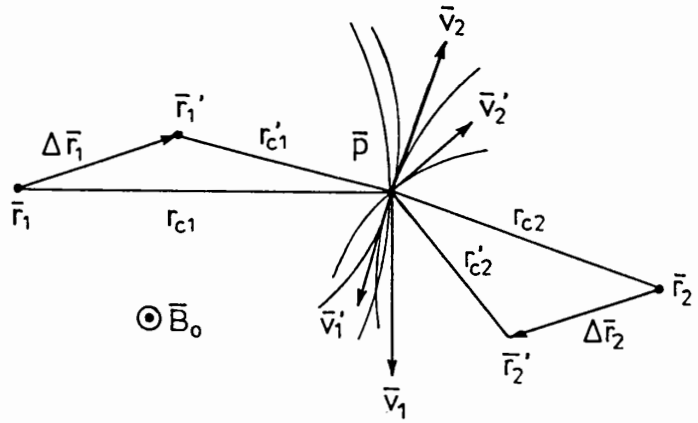

Fig. 6.2. Kollision mellem to ensladede partikler fører til lige store men modsatrettede gyrocenterspring for de to partikler.

Til bestemmelse af de to partiklers gyrocentres position før stødet har vi

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{P} + \frac{m_1}{q_1 B_o^2} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_o \tag{6.5}$$

og

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{P} + \frac{m_2}{q_2 B_o^2} \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_o \,. \tag{6.6}$$

Under stødet springer de to gyrocentre til de nye positioner

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{P} + \frac{m_1}{q_1 B_o^2} \mathbf{v}_1' \times \mathbf{B}_o \tag{6.7}$$

og

$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{P} + \frac{m_2}{q_2 B_o^2} \mathbf{v}_2' \times \mathbf{B}_o \,. \tag{6.8}$$

Heraf følger for de to gyrocentres spring

$$\Delta \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_1 = \frac{m_1}{q_1 B_o^2} \Delta \mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_o \tag{6.9}$$

og

$$\Delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2' - \mathbf{r}_2 = \frac{m_2}{q_2 B_o^2} \Delta \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_o \,, \tag{6.10}$$

hvor

$$\Delta \mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{v}_{1,2}' - \mathbf{v}_{1,2} \,. \tag{6.11}$$

Idet den tid, partiklerne vekselvirker under stødet, er meget kort sammenlignet med gyroperioden (jfr. Tabel 2.1 og underafsnit 2.3.10), når partiklerne ikke at udveksle bevægelsesmængde med magnetfeltet under stødet. Partiklernes samlede bevægelsesmængde er derfor den samme før og efter stødet. Dette udtrykkes ved

$$m_1 \Delta \mathbf{v}_1 + m_2 \Delta \mathbf{v}_2 = 0 \,. \tag{6.12}$$

Kombination af (6.12) med (6.9) og (6.10) fører til

$$\Delta \mathbf{r}_1 = -\Delta \mathbf{r}_2 \quad \text{for} \quad q_1 = q_2 \tag{6.13}$$

og

$$\Delta \mathbf{r}_1 = \Delta \mathbf{r}_2 \quad \text{for} \quad q_1 = -q_2 \,. \tag{6.14}$$

Ingen diffusion ved stød mellem ensladede partikler

Af (6.13) fremgår, at når to ladede partikler med samme ladning kolliderer, vil deres gyrocentre springe lige langt, men i modsat retning. Midtpunktet mellem to partikler med samme ladning vil altså ikke flytte sig under en kollision mellem dem. Kollisioner mellem ens partikler, ens ioner mod hinanden eller elektroner mod elektroner, vil derfor ikke føre til diffusion.

Diffusion ved stød mellem modsat ladede partikler

Ser vi dernæst på kollisioner mellem partikler med modsat ladning som f.eks. elektroner mod enkeltladede ioner, følger af (6.14), at deres gyrocentre springer lige langt og i samme retning. Sådanne kollisioner vil derfor forårsage diffusion. Vi bemærker desuden, at da gyrocenterspringene for elektroner og de enkeltladede ioner, som vi betragter, er lige store, så er også diffusionskoefficienterne for de to partikelarter lige store. Heraf følger, at hvis der på et tidspunkt har været ladningsneutralitet i et plasma, så vil diffusionsprocesser

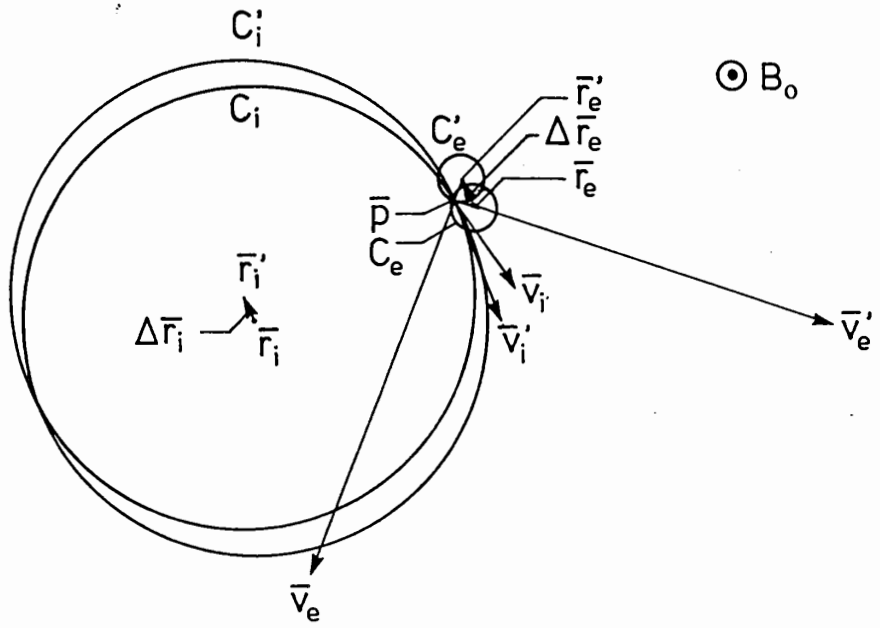

Fig. 6.3. Kollision mellem ioner og elektroner medfører gyrocenterspring af størrelsesorden elektrongyroradius.

ikke føre til ladningsadskillelse.

Vurdering af diffusionskoefficienten

Ved brug af ovenstående resultater er vi nu i stand til at finde et udtryk for diffusionskoefficienten, der bestemmer et plasmas diffusion vinkelret på et homogent magnetfelt. Vi skal først finde længden af et karakteristisk gyrocenterspring, som fremkommer, når en elektron og en ion kolliderer. Figur 6.3 viser cirkelbanerne C_i og C_e med gyrecentre i $\mathbf{r}_i$ og $\mathbf{r}_e$ for henholdsvis en ions og en elektrons bevægelse vinkelret på $\mathbf{B}_0$-feltet, før de kolliderer i punktet **P**. Efter kollisionen er de tilsvarende baner C_i' og C_e' med gyrocentre i $\mathbf{r}_i'$ og $\mathbf{r}_e'$. Begge partikler antages at være termiske, dvs. de har begge en bevægelsesenergi omkring κT. Heraf følger, at elektronens hastighed er ca. $(m_i/m_e)^{1/2}$ gange større end ionens, og at ionens gyroradius er ca. $(m_i/m_e)^{1/2}$ gange større end elektronens. Disse størrelsesforhold er indikeret på figuren. Under kollisioner udveksler de to partikler bevægelsesmængde, hvor $\Delta(m_i\mathbf{v}_i) = -\Delta(m_e\mathbf{v}_e)$. Da elektronens masse er lille, får den en stor hastighedsændring, $\mathbf{v}_e \neq \mathbf{v}_e'$. Tilsvarende bliver hastighedsændringen for den tunge ion lille, $\mathbf{v}_i \simeq \mathbf{v}_i'$. Under kollisionen udveksler de to partikler også bevægelsesenergi. Da ionen i forhold til elektronen næsten ligger stille og er meget tung, vil elektronen under stødet prelle af på ionen og efter stødet have næsten samme bevægelsesenergi, som den havde før stødet, dvs. $v_e \simeq v_e'$. Tilsvarende vil ændringen i ionernes bevægelsesenergi også være lille, dvs. $v_i \simeq v_i'$. Konklusionen er, at under stødet vil retningen af elektronernes hastighedsvektorer ændres drastisk, men længde forbliver næsten uændret. Positionen af en elektrons gyrocenter vil derfor springe et stykke af størrelsesordenen r_{ce} i en tilfældig retning, og, som det fremgår af ligning (6.14), vil ionens gyrocenter springe samme stykke i samme retning. For det karakteristiske gyrocen-

terspring ved en kollision vælger vi derfor elektrongyroradius r_{ce} beregnet ud fra ligning (2.28)

$$\Delta r = r_{ce,kar} = \frac{\sqrt{2m_e \kappa T_e}}{e B_o} . \qquad (6.15)$$

For den karakteristiske kollisionsfrekvens vælger vi $\nu_{korr,ei}$ som givet ved ligning (2.39). Indsættes disse størrelser i (6.2) findes for diffusionskoefficienten vinkelret på $\mathbf{B}_0$-feltet

$$D_\perp \approx 4.5 \cdot 10^{-33} ln\Lambda \left[\frac{n}{B_o^2 (\kappa T_e)^{1/2}}\right] \frac{m^2}{s} ; \qquad (6.16)$$

$n \; i \; m^{-3}$, $B_o \; i \; T$ *og* $\kappa T_e \; i \; J$.

For fusionsplasmaer er lnΛ tæt ved 20 (se diskussionen i forbindelse med formel 2.26). Hermed opnås følgende tilnærmede udtryk for $D_\perp$

$$D_\perp \approx 8 \cdot 10^{-24} \left[\frac{n}{B_o^2 (\kappa T_e)^{1/2}}\right] \frac{m^2}{s} ; \qquad (6.17)$$

$n \; i \; m^{-3}$, $B_o \; i \; T$ *og* $\kappa T_e \; i \; keV$.

I denne fænomenologiske behandling har vi indsat karakteristiske værdier for gyrocenterspringene og for kollisionsfrekvensen og ikke de korrekte middelværdier. Vi kan derfor kun forvente, at talkonstanterne i udtrykkene (6.16) og (6.17) for $D_\perp$ har den rette størrelsesorden. Det er mere interessant at diskutere diffusionskoefficientens afhængighed af plasmaets parametre n, B_0 og T_e. At $D_\perp$ vokser proportionalt med plasmatætheden, skyldes naturligvis, at kollisionsfrekvensen er proportional med tætheden. B_0^{-2} -afhængigheden skyldes, at elektronernes gyroradier, som jo repræsenterer det karakteristiske spring, er proportionale med B_0^{-1}. Denne afhængighed viser fordelene ved at holde et fusionsplasma indesluttet i et stærkt magnetfelt. Det mest interessante er, at $D_\perp$ er proportional med $(\kappa T_e)^{-½}$. Denne afhængighed, der skyldes, at kollisionsfrekvenserne falder med temperaturen, viser, at det må forventes at være lettere at holde et plasma indesluttet, jo varmere det er. Lawson-kravet om den høje temperatur i et fusionsplasma er derfor en fordel.

6.2.2. Plasmadiffusion behandlet i fluidbeskrivelsen

I dette underafsnit vil vi udlede et plasmas diffussionskoefficient for diffusion vinkelret på feltlinierne i et homogent magnetfelt. Vi vil finde, at $D_\perp$ er tæt knyttet til plasmaets specifikke modstand, som også vil blive diskuteret.

Diffusionskoefficienten beregnes ved hjælp af fluidligningerne

I sidste underafsnit blev det vist, at diffusionen alene skyldes kollisioner mellem ionerne og elektronerne. Da virkningen af kollisioner er negligeret i ligningerne for ideal MHD, (4.87) til (4.92), er det klart, at dette ligningssæt ikke kan benyttes til beregning af diffusionskoefficienten. Bemærk i den forbindelse, at da vi i underafsnit 5.1.2 behandlede et plasmas diamagnetisme ved brug af ligningerne for ideal MHD, fandt vi netop, at der ikke er nogen plasmadiffusion vinkelret på $\mathbf{B}_0$-feltet, i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen på Fig. 5.3.a). Ideal MHD fører til $D_\perp = 0$. For at finde et sæt fluidligninger, der også medtager virkningen af elektron-ionstød, går vi tilbage til udledningen af fluidligningerne i afsnit 4.2 og benytter ligning (4.49), der beskriver virkningen af alle kræfter på et plasmaelement, også virkningen af stødkræfter. Under henvisning til diskussionen af tryktensoren $\underline{\underline{P}}_\alpha$ i afsnit 4.3 vil vi igen negligere den anisotrope del af denne tensor, $\underline{\underline{\Pi}}_\alpha$. Hermed fører (4.49) til følgende to fluidligninger for henholdsvis elektroner og ioner,

$$n_e m_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} + e\, n_e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) + \nabla n_e \kappa T_e = \mathbf{R}_e \qquad (6.18)$$

og

$$n_i m_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} - e\, n_i(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) + \nabla n_i \kappa T_i = \mathbf{R}_i\,, \qquad (6.19)$$

hvor $\mathbf{R}_{e,i}$ beskriver impulsudvekslingen ved stød mellem elektronerne og ionerne, som fremgår af (4.45) og (4.30).

Ligningerne (6.18) og (6.19) skal nu benyttes til at studere diffusionen i den simple plasmakonfiguration, hvis diamagnetisme blev diskuteret ved hjælp af ideal MHD i underafsnit 5.1.2, og som er vist på Fig. 5.3.a). Vi vil nu finde, at virkningen af kollisionerne, som er udtrykt ved $\mathbf{R}_{e,i}$, er, at plasmaet diffunderer i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen.

I underafsnit 5.1.2 fandt vi, at det plasma, vi dér behandlede i ideal MHD-beskrivelsen, var stationært, $d/dt = 0$. Vi vil antage, at plasmaet også er stationært eller næsten stationært, når det behandles ved brug af (6.18) og (6.19), og vi vil derfor se bort fra de tidsafledede første led på venstre side af disse ligninger. Vi vil yderligere antage, at $\mathbf{E} = 0$. Vi har allerede i sidste underafsnit set, at diffusion ikke fører til ladningsadskillelse, det betyder, at hvis $\mathbf{E} = 0$, når vi starter, så vil $\mathbf{E}$ blive ved at være 0, fordi diffusion ikke opbygger rumladninger. Vi kan derfor også antage $n_e = n_i = n$.

Vedrørende $\mathbf{R}_{e,i}$-ledene fremgår det af ligningerne, at de beskriver den kraft på elektronerne henholdsvis ionerne i en volumenenhed plasma, som skyldes stødvekselvirkning med volumenenhedens ioner henholdsvis elektroner. Heraf følger, som det også fremgår af (4.45) og (4.31), at $\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i$. For at sætte $\mathbf{R}$-ledene i relation til plasmaets specifikke modstand, η, og til den elektriske strøm ser vi på en volumenenhed i et plasma, hvori der er påtrykt et elektrisk felt $\mathbf{E}$, som giver anledning til en strømtæthed givet ved Ohm's lov

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{E}}{\eta} . \tag{6.20}$$

Det elektriske felt påvirker volumenenhedens elektroner med en kraft

$$\mathbf{K}_e = -en\,\mathbf{E} . \tag{6.21}$$

Da situationen er stationær, $\mathbf{j}$ = konstant, er også elektronfluidhastigheden $\mathbf{u}_e$ = konstant. Derfor må elektronerne i volumenenheden påvirkes af en bremsekraft, der skyldes stød mod ionerne, og som er givet ved

$$\mathbf{R}_e = -\mathbf{K}_e \tag{6.22}$$

Kombination af (6.20)-(6.22) samt (4.55) fører til

$$\mathbf{R}_e = en\eta\mathbf{j} = e^2n^2\eta(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \tag{6.23}$$

og

$$\mathbf{R}_i = -en\eta\mathbf{j} = -e^2n^2\eta(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) . \tag{6.24}$$

Med de nævnte antagelser samt de opnåede udtryk for $\mathbf{R}_{e,i}$ kan (6.18) og (6.19) skrives

$$en\mathbf{u}_e \times \mathbf{B} + \nabla n\kappa T_e = e^2n^2\eta(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \tag{6.25}$$

og

$$-en\mathbf{u}_i \times \mathbf{B} + \nabla n\kappa T_i = -e^2n^2\eta(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \tag{6.26}$$

Vi skal nu benytte (6.25) og (6.26) til igen at behandle det plasma, som vi allerede har behandlet i underafsnit 5.1.2 ved hjælp af ideal MHD, og som er vist på Fig. 5.3.a). Plasmaet holdes indesluttet i et påtrykt homogent magnetfelt $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{z}$. Plasmaet ligger i halvrummet $x < 0$ med overflade i y-z-planen omkring hvilken $d(n\kappa T)/dx < 0$. Der er ingen z-afhængigheder i plasmaparametrene, og det antages, at ingen af fluidhastighederne har z-komponenter.

Vi bemærker først, at addition af (6.25) og (6.26) fører eksakt over i (5.5). Dvs. når (6.25) og (6.26) løses sammen med Maxwell-ligningen (5.6), får vi nøjagtig samme løsninger for plasmastrømmene som dem, vi fandt i underafsnit 5.1.2. Plasmaet har den samme diamagnetiske virkning, enten det behandles i ideal MHD eller i et fluidligningsystem, hvor stød tages med i betragtning.

Ønsker man at løse (6.25) og (6.26) for fluidhastighederne $\mathbf{u}_e$ og $\mathbf{u}_i$, betaler det sig at opskrive de to ligningers x- og y-komponenter. Herved opnås fire

ligninger til bestemmelse af de fire variable. Løsning af disse fire ligninger fører til resultatet

$$u_{ey} = \frac{-1}{neB} \frac{\partial(n\kappa T_e)}{\partial x} , \tag{6.27}$$

$$u_{iy} = \frac{1}{neB} \frac{\partial(n\kappa T_i)}{\partial x} \tag{6.28}$$

$$u_{ex} = u_{ix} = -\frac{\eta}{B^2} \frac{\partial(n\kappa(T_i + T_e))}{\partial x} , \tag{6.29}$$

der med (4.56) bliver

$$u_{ex} = u_{ix} = -\frac{\eta}{B^2} \frac{\partial p}{\partial x} . \tag{6.30}$$

Sammen med (4.55) fører (6.27) og (6.28) direkte til de resultater, der blev fundet i underafsnit 5.1.2. (6.29) og (6.30) viser, at der i plasmaet er en fluidhastighed, der transporterer plasmaets elektroner og ioner i $-\nabla p$-retningen med samme hastighed. I geometrien på Fig. 5.3.a) bliver det i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen. Diffusionskoefficienten for denne diffusionsproces bestemmes ved hjælp af definitionsligningen (6.1) til

$$D_\perp = \frac{\eta p}{B^2} . \tag{6.31}$$

I udledningen af (6.31) er det antaget, at $(T_e + T_i)$ er uafhængig af x.

For plasmaer med små β-værdier er $\mathbf{B} \approx \mathbf{B}_0$, og (6.31) kan derfor for sådanne plasmaer skrives

$$D_\perp = \frac{\eta\beta}{2\mu_o} . \tag{6.32}$$

For at kunne anvende diffusionskoefficienten i (6.31) og (6.32) til beregninger er det nødvendigt at kende η som funktion af plasmaets parametre. Det ligger uden for denne bogs rammer at gennemgå de detailjerede beregninger, der fører frem til en nøjagtig værdi for η. Vi vil nøjes med at vise, hvilke principper, der bruges i sådanne beregninger, og udlede et groft tilnærmet udtryk.

Plasmas specifikke modstand

For at udlede et udtryk for et plasmas specifikke modstand ser vi på Fig. 6.4, hvor der er vist et plasma med nogle ioner (+) og nogle elektroner (–). I plasmaet er der påtrykt et elektrisk felt, **E**, som påvirker alle de ladede partikler. En bane for en enkelt elektron, ⊖, er skitseret. Den påvirkes af kraften $-e\mathbf{E}$ og accelereres derfor i $-\mathbf{E}$-retningen. Hver gang elektronen støder mod en anden partikel, ændres dens hastighed. Mellem to stød beskrives dens bane ved hjælp af Newton's 2. lov

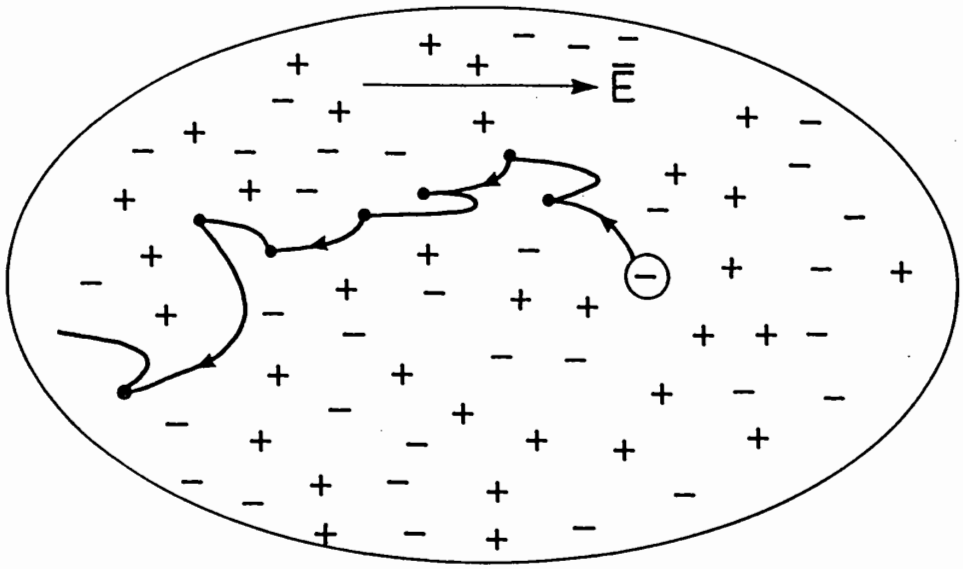

Fig. 6.4. Eksempel på elektronbane i plasma med elektrisk felt.

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E}\,, \tag{6.33}$$

der viser, at banerne svarer til de kendte baner i frie fald, altså at de er parabelformede (se underafsnit 3.2.1). Lad os kalde elektronens stødfrekvens ν_e, og lad os antage, at spredningen ved stødene er isotrope, således at elektronen efter et stød i gennemsnit har hastigheden nul i **E**-retningen. Integration af (6.33) giver da for elektronens karakteristiske middelhastighed mellem to stød

$$\langle \mathbf{v}_e \rangle = -\frac{e\mathbf{E}}{m_e}\frac{1}{\nu_e}\,. \tag{6.34}$$

Vi får altså en elektronstrømtæthed i plasmaet, som er

$$\mathbf{j}_e = \frac{e^2 n}{m_e \nu_e}\mathbf{E}\,. \tag{6.35}$$

Vi vil også have et tilsvarende strømbidrag fra ionerne, men det er meget mindre på grund af masseafhængigheden, og det kan derfor negligeres.

Ved hjælp af Ohm's lov giver (6.35)

$$\eta = \frac{m_e \nu_e}{e^2 n}\,. \tag{6.36}$$

Indsættes heri ν_e som givet ved formel (2.39), findes

$$\eta \approx 2.2 \cdot 10^{-33} \frac{ln\Lambda}{[(\kappa T_e)^{3/2}]} \Omega \cdot m \; ; \qquad (6.37)$$

κT_e *i* J .

Med $\ln\Lambda \approx 20$ omformes (6.37) til

$$\eta \approx 2 \cdot 10^{-8} \left[(\kappa T_e)^{-3/2}\right] \Omega \cdot m \; ; \qquad (6.38)$$

κT_e *i keV* .

Med det groft tilnærmede udtryk (2.39), der er benyttet for ν_e, kan talkonstanterne i (6.37) og (6.38) kun forventes at have den rette størrelsesorden.

Mere nøjagtige beregninger, der bl.a. tager hensyn til, at elektronerne i et plasma dækker et helt spektrum af hastigheden og derfor har forskellige fri middelvejlængder og derfor også forskellige kollisionsfrekvenser, fører til [2], [14]

$$\eta = 1.65 \cdot 10^{-9} \frac{ln\Lambda}{[(\kappa T_e)^{3/2}]} \Omega \cdot m \; ; \qquad (6.39)$$

κT_e *i keV* ,

der for karakteristiske fusionsplasmaer med $\ln\Lambda = 17$ bliver

$$\eta = 2.8 \cdot 10^{-8} \left[(\kappa T_e)^{-3/2}\right] \Omega \cdot m \; ; \qquad (6.40)$$

κT_e *i keV* .

Det er interessant at bemærke, at et plasmas ved en temperatur på godt 1 keV har en specifik modstand som kobber, og at et fusionsplasma ved 10 keV har ca. 1/5 af kobbers specifikke modstand. Det er også interessant at bemærke, at et plasmas specifikke modstand er næsten uafhængig af tætheden. Tætheden optræder kun gennem $\ln\Lambda$-ledet, og afhængigheden er meget svag.

De ovenfor anførte betragtninger over et plasmas specifikke modstand gælder kun for umagnetiserede plasmaer og for plasmaer, hvor det elektriske felt og strømmen er parallelle med de magnetiske feltlinier, vi har altså kun beregnet den parallelle specifikke modstand, $\eta_{\parallel}$. For vores diffusionsproblem, hvor diffusionen er vinkelret på magnetfeltlinierne, er det klart, at det er den vinkelrette specifikke modstand, der skal benyttes. Normalt defineres den specifikke modstand ved forholdet mellem **E** og **j** som i (6.20), og det er da også denne definition, der er benyttet til beregningen ovenfor af η for et

umagnetiseret plasma og $\eta_{\parallel}$ for et magnetiseret plasma. Ser vi på forholdene for **E**-felter og strømme vinkelret på feltlinierne i et magnetiseret plasma, er situationen mere kompliceret. Lægger vi f.eks. et elektrisk felt, $\mathbf{E}_{\perp}$, vinkelret på feltlinierne i et homogent magnetiseret støfdrit plasma, ved vi fra analysen i underafsnit 3.2.3, at det elektriske felt ikke genererer nogen strøm i plasmaet. Vi har kun, at alle de ladede partikler driver samlet med drifthastigheden $\mathbf{v}_d$, givet ved (3.15), som står vinkelret på både **E**- og **B**-linierne. Betragtet på denne måde giver (6.20), at $\eta_{\perp} = \infty$. Det er klart, at udtrykket (6.36) ikke kan beskrive $\eta_{\perp}$ for dette plasma, så længe vi definerer η ved (6.20), idet (6.36) jo fører til $\eta \to 0$ for det støfdri plasma med $\nu_e \to 0$.

På den anden side har vi set, at der i overfladen af det plasma, vi betragter, løber diamagnetiske strømme, hvis størrelse er givet i ligning (5.13). Disse strømme løber uafhængigt af et eventuelt elektrisk felt, og også når $\mathbf{E} = 0$. Vi må altså konkludere, at Ohm's lov ikke gælder for felter og strømme vinkelret på feltlinierne i et magnetiseret plasma, og at vi derfor ikke kan finde $\eta_{\perp}$ ved hjælp af denne lov.

Som det fremgår af (6.23) og (6.24) kan den specifikke modstand også opfattes som et mål for den gensidige støinducerede kraftpåvirkning mellem elektroner og ioner i et strømførende plasma. Denne opfattelse er mere generel end den gængse, hvor η defineres ved hjælp af Ohm's low, idet den gælder for alle strømførende plasmaer uafhængigt af, hvordan strømmen er induceret. Med denne måde at opfatte den specifikke modstand på, kan η altid beregnes ud fra ligning (6.36), og den derved opnåede η-værdi er den rette at indsætte i ligningerne (6.31) og (6.32).

$\eta_{\perp}$ er beregnet af Spitzer [2], [14] ved hjælp af samme procedure, som førte til udtrykkene (6.39) og (6.40). Med $\ln\Lambda = 17$ findes resultatet

$$\eta_{\perp} = 5.5 \cdot 10^{-8} \left[(\kappa T_e)^{-3/2}\right] \Omega \cdot m \; ; \qquad (6.41)$$

$$\kappa T_e \; i \; keV \; .$$

$\eta_{\perp}$ som udtrykt ved (6.41) er en faktor 1,96 større end η i (6.40). Dette skyldes at hastighedsfordelingsfunktionen for elektronerne er forskellig i de to tilfælde. I et umagnetiseret plasma, hvor strømmen genereres af et elektrisk felt, accelereres alle elektronerne i $-\mathbf{E}$-retningen, og deres hastighedsfordelingsfunktion bliver derfor anisotrop. Den forøgede gennemsnitshastighed i $-\mathbf{E}$-retningen fører til en reduktion af middelkollisionsfrekvensen og dermed til en lavere η-værdi. Ved beregninger af $\eta_{\perp}$ for et magnetiseret plasma skal man tage i betragtning, at magnetfeltet tvinger elektronerne til at bevæge sig i cirkelbaner; derfor opstår der ikke anisotropi i fordelingsfunktionen, og vi finder derfor ikke den nævnte reduktion i middelkollisionsfrekvensen. Det bør i denne forbindelse nævnes, at formel (6.41) er udledt under den an-

tagelse, at $\omega_{ce} >> \nu_e$.

Indsættes $\eta_\perp$ givet i (6.41) for η i (6.31) findes

$$D_\perp = 1{,}8 \cdot 10^{-23} \left[\frac{n}{B^2(\kappa T_e)^{1/2}}\right] \frac{m^2}{s} ; \qquad (6.42)$$

$n \; i \; m^{-3}$, $B \; i \; T$, $\kappa T \; i \; keV$.

$D_\perp$ beregnet med Spitzer-modstand

Sammenligning mellem $D_\perp$ givet ved (6.42) og den værdi for $D_\perp$, som blev opnået ved mere fænomenologiske beregninger, og som er givet i formel (6.17) viser, at $D_\perp$ i (6.17) er underestimeret med ca. en faktor 2.

*Diffusion $\perp$ **B** betragtet som **K**×**B**-drift*

Det kan have interesse at betragte et plasmas diffusion vinkelret på magnetfeltlinierne i et homogent magnetfelt på en anden måde, nemlig som en **K**×**B**-drift. Som diskuteret i forbindelse med ligningerne (6.23) og (6.24) påvirkes elektronerne i en volumenenhed af et strømførende plasma af en stødvekselvirkningskraft fra ionerne, som er enη**j**. Omvendt påvirkes ionerne af kraften –enη**j**. Hver elektron eller ion påvirkes da af en gennemsnitskraft $\pm$enη**j**. Indsættes disse kræfter for **K** i (3.17), finder vi en driftshastighed, der for begge partikelarter er

$$\mathbf{v}_d = -\frac{\eta \mathbf{j} \times \mathbf{B}}{B^2} , \qquad (6.43)$$

der ved brug af (5.5) fører til

$$\mathbf{v}_d = -\frac{\eta \nabla p}{B^2} . \qquad (6.44)$$

Indsættes (6.31) i (6.1) og antages igen, at plasmatemperaturen er konstant i rummet, ser vi, at drifthastigheden i (6.44) er den samme som diffusionshastigheden **u**. Vi ser heraf, at selvom stødkræfterne ikke repræsenterer en kontinuert virkende kraft på den enkelte ladede partikel, så får vi alligevel det rigtige resultat for diffusionshastigheden, hvis vi i formlen for **K**×**B**-drifthastigheden indsætter den middelkraft på den enkelte partikel, som stødene repræsenterer.

6.2.3. Klassisk Diffusion i Fusionsplasmaer

Klassisk diffusion forhindrer ikke opfyldelse af Lawson-kritereit

I sidste underafsnit fandt vi diffusionskoefficienten for klassisk diffusion af plasma vinkelret på feltlinierne i et homogent magnetfelt. Den klassiske diffusion, der jo skyldes de uundgåelige kollisioner mellem de ladede partikler, vil altid være virksom i et plasma, der er indesluttet i et magnetfelt. Vi skal nu vurdere, hvilke grænser den sætter for indeslutningen af et fusionsplasma, og se, om den vil kunne forhindre os i at opfylde Lawson-kriteriet.

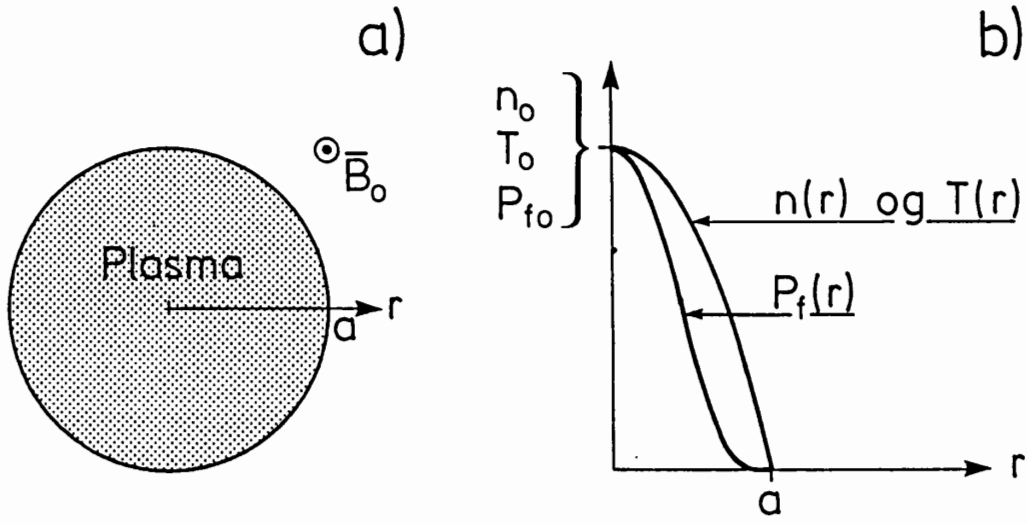

Fig. 6.5. a) Fusionsplasmasøjle i homogent magnetfelt
b) n-, T- og P_f-profiler benyttet ved vurdering af klassisk diffusion

Vi betragter en søjle af et fusionsplasma i et homogent magnetfelt $\mathbf{B}_o$, som vist på Fig. 6.5.a). Midt i plasmasøjlen er plasmatætheden n_o og temperaturen T_o. Vi lader elektron- og iontemperaturerne være lige store og antager, at plasmaets β-værdi er $<< 1$. Plasmasøjlens radius er a. For tætheds- og temperaturprofilerne vælger vi karakteristiske eksperimentelle profiler nemlig

$$n(r) = n_o \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \tag{6.45}$$

og

$$T(r) = T_o \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) . \tag{6.46}$$

Disse profiler er vist på Fig. 6.5.b). Profilen for fusionseffekttætheden, $P_f(r)$, er beregnet ved hjælp af (1.12) og også vist på Fig. 6.5.b). Det fremgår, at effekttætheden er faldet til ca. 5% af $P_f(r=o)$-værdien ved $r = 0{,}7a$. Vi definerer, at fusionsplasmaets overflade ligger ved denne r-værdi. For plasmaets parametre vælger vi følgende størrelser, der vil være karakteristiske for et fusionsplasma: $B_o = 3T$, $n_o = 10^{20} m^{-3}$, $\kappa T_o = 10$ keV og $a = 1$ m.

Det totale antal plasmapartikler inden for $r = 0{,}7a$ pr. længdeenhed plasmasøjle er

$$\begin{aligned} N &= \int_o^{0,7a} 2\pi r n_o \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) dr \\ &= 0{,}37 \pi a^2 n_o \\ &\simeq 1{,}2 \cdot 10^{20} m^{-1} \end{aligned} \tag{6.47}$$

Middeltætheden i fusionsplasmaet er

$$\begin{aligned}\langle n\rangle &= \frac{N}{\pi(0,7a)^2}\\ &\simeq 0,75n_o\\ &\simeq 0,75\cdot 10^{20}m^{-3}\end{aligned} \qquad (6.48)$$

Formel (6.42) giver for diffusionskoefficienten ved r = 0,7a, idet det benyttes at, $n(0,7a) \simeq 0,5\ n_o$, og $T(0,7a) \simeq 0,5\ T_o$.

$$D_\perp \simeq 4,5\cdot 10^{-5}m^2/s\ . \qquad (6.49)$$

Partikeltabene pr. tidsenhed ud gennem overfladen af en længdeenhed plasmasøjle ved r = 0,7a beregnes ved hjælp af (6.1) til

$$\begin{aligned}T &= 2\pi\cdot 0,7a(nu)\,|_{r=0,7a}\\ &= -2\pi\, 0,7a\left(D_\perp\frac{\partial n}{\partial r}\right)|_{r=0,7a}\\ &\simeq 1,4\cdot 10^{16}m^{-1}s^{-1}\end{aligned} \qquad (6.50)$$

Kombination af (6.47) og (6.50) giver for plasmapartiklernes middellevetid inden for overfladen ved r = 0,7a

$$\tau_p = \frac{N}{T} \simeq 8\cdot 10^3 s\ . \qquad (6.51)$$

Hvis vi antager, at partiklerne, der diffunderer ud gennem plasmaoverfladen, i snit har samme kinetiske energi som partiklerne i plasmaet, er energiindeslutningstiden $\tau_E = \tau_p$. Ved brug af (6.48) finder vi så

$$\langle n\rangle\tau_E \simeq 6\cdot 10^{23} s\, m^{-3}\ . \qquad (6.52)$$

Da $n\tau_E$-produktet i (6.52) er mere end tre størrelsesordener større end Lawson-kriteriets krav til plasmaet i en fusionsreaktor, kan vi slutte, at den klassiske diffusion ikke er en alvorlig hindring for fusionsenergien. Det er andre diffusionsmekanismer som den neoklassiske, der behandles i næste afsnit, og især den turbulente diffusion, som vil blive nævnt i afsnit 6.4, der er de store problemer for fusionsforskningen.

6.3. Neoklassisk Diffusion i Tokamakkonfigurationer

I kapitel 5 har vi set, at kun ret komplicerede magnetfeltkonfigurationer kan holde et plasma indesluttet i en stabil ligevægtssituation. Tokamakken er en sådan konfiguration, og dens magnetfelt afviger meget fra det homogene felt, hvori vi har studeret diffusion i sidste afsnit. Vi skal nu studere stødforårsaget diffusion i tokamakkonfigurationen, og vi vil finde, at den er væsentlig større end den klassiske diffusion i homogene felter. Vi kalder den stødforårsagede diffusion i tokamakker og andre toroidale systemer for neoklassisk diffusion. Den neoklassiske diffusions forøgelse i forhold til den rent klassiske er den pris, som vi må betale for at opnå et plasma, der er indesluttet i en stabil ligevægtssituation.

Vi vil gennemføre en fænomenologisk behandling af den neoklassiske diffusion og ved beregningerne bruge udtrykket i (6.2) for diffusionskoefficienten. For at finde de relevante udtryk for Δr og ν er det nødvendigt at studere banerne for de ladede partikler i en tokamak i nogen detalje. I underafsnit 6.3.1 ser vi på disse baner, og derefter i 6.3.2 beregner og diskuterer vi diffusionskoefficienten for neoklassisk diffusion i forskellige parameterområder.

6.3.1. Partikelbaner i tokamakkonfigurationen

I dette underafsnit ser vi på detaljer i partikelbaner i en tokamakkonfiguration. Vi starter med under a) at se på banerne i en grov tilnærmelse, hvor de ladede partikler blot bevæger sig i skruelinier langs magnetfeltlinierne. Derefter går vi under b) mere i detalje ved også at tage hensyn til de korrektioner på de skrueformede baner, der skyldes, at magnetfeltstyrken varierer langs feltlinierne. Endelig under c) ser vi også på de korrektioner, der skyldes, $\mathbf{K}\times\mathbf{B}$-driften og ∇B-driften, som er diskuteret i underafsnit 3.2.6. Da vi skal benytte partikelbanerne til at beregne diffusionskoefficienten for diffusion i $\hat{\mathbf{r}}$ -retningen, er det i det væsentligste banernes projektion langs toroidale linier ind på et polært plan (φ = konstant), der har interesse. På Fig. 6.6-6.10 afbilder vi derfor banerne i polære snit, der følger partiklerne i deres bevægelse i toroidal retning.

a) Simple skrueformede baner

Skrueformede partikelbaner

På Fig. 5.4 og 5.9 er det vist, hvordan magnetfeltlinierne løber i en tokamak. I første tilnærmelse vil en ladet partikels ledecenter være bundet til en magnetfeltlinie. Partiklen selv løber frit langs denne magnetfeltlinie, medens den

snor sig i sin gyrobevægelse omkring den. Gennem plasmaet lægger vi et lodret snit som det, der på Fig. 5.9 er brugt til at definere $\Delta\theta$-vinklen. Vi lader dette snit dreje sig omkring tokamakkens lodrette akse (R = 0) på en sådan måde, at det hele tiden følger partiklen. I dette snit får partiklens bane så den form, der er vist på Fig. 6.6. Ledecentret følger den punkterede kurve, der også repræsenterer skæringskurven mellem en fluxflade og snittet. Når ledecentret har bevæget sig q gange rundt i toroidal retning, har det bevæget sig én gang rundt i $\hat{\theta}$-retningen i snittet på figuren. Partiklen selv følger i sin gyrobevægelse den viste bane.

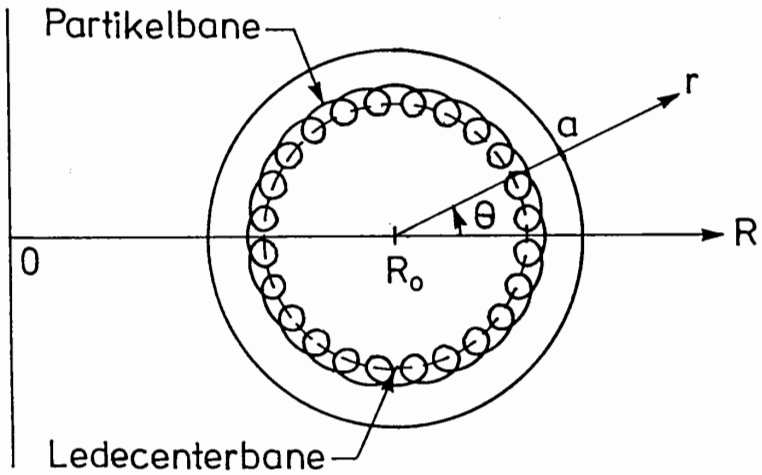

Fig. 6.6. I første tilnærmelse følger ladede partiklers ledecenter en magnetfeltlinie.

b) Virkning af Spejlfelter

Tokamakkens spejlfelter

I behandlingen ovenfor har vi antaget, at partiklen bevæger sig frit langs magnetfeltlinierne. Det er ikke helt korrekt, da magnetfeltstyrken ændrer sig langs en feltlinie, hvorved der opstår magnetisk spejlvirkninger af den type, der er omtalt i underafsnit 3.3.1. Vi har allerede i forbindelse med formel (5.82) og med diskussionen i afsnit 5.6 set, at det toroidale felt dominerer over det poloidale. Styrken af det toroidale felt varierer over et tværsnit af plasmaet og kan skrives som

$$B_t(R) = B_{to}\frac{R_o}{R_o + r\cos\theta}\,, \tag{6.53}$$

hvor B_{to} er det toroidale felt for $R = R_o$. For en fast r-værdi finder vi det svageste felt for $\theta = 0$ og det stærkeste for $\theta = \pi$. Det magnetiske spejlforhold, der er defineret i (3.50), er lig forholdet mellem disse to feltstyrker

$$f_M(r) = \frac{R_o - r}{R_o + r}\,. \tag{6.54}$$

Midt i plasmaet, hvor r = 0, er $f_M = 1$, og den antager sin største værdi på plasmaoverfladen, hvor r = a. Rækkeudvikler vi $f_M(a)$ i det inverse aspektforhold $\varepsilon = a/R_0$, finder vi til første orden i ε,

$$f_M(a) = 1 - 2\varepsilon \,. \tag{6.55}$$

Fri partikler

Ved brug af (3.50) ser vi, at kun partikler, hvis hastighedsvektor i punktet $(r,\theta) = (a,o)$ danner en vinkel α med feltlinierne, der er mindre end α_0, kan trænge igennem det stærke felt ved $(r,\theta) = (a,\pi)$. Disse partikler kan altså bevæge sig hele vejen rundt i toroidal retning, og deres baner i snittet, der følger partiklerne, bliver som vist på Fig. 6.6. Disse partikler kaldes fri partikler.

Bundne partikler

Partikler, hvis hastighedsvektor danner en vinkel α med feltlinierne i $(r,\theta) = (a,o)$, der er større end α_0, vil reflekteres af det stærke felt, og de vil komme til at oscillere frem og tilbage mellem to θ-værdier: $\pm\,\theta_{max}(\alpha)$, som vist på Fig. 6.7. Bemærk, at på Fig. 6.7 er kun ledecentrets bane optegnet, selve partiklens gyrobane skal underforstås. Bemærk også, at $\theta_{max} \to \pi$ for $\alpha \to \alpha_0$, og $\theta_{max} \to 0$ for $\alpha \to \pi/2$. De partikler, der således ikke kan trænge gennem det stærke felt ved $(r,\theta) = (a,\pi)$, men som oscillerer mellem to punkter, kaldes bundne partikler.

Vinklen α_0 er ifølge (3.50) bestemt ved

$$\sin^2 \alpha_o = f_M \simeq 1 - 2\varepsilon \,. \tag{6.56}$$

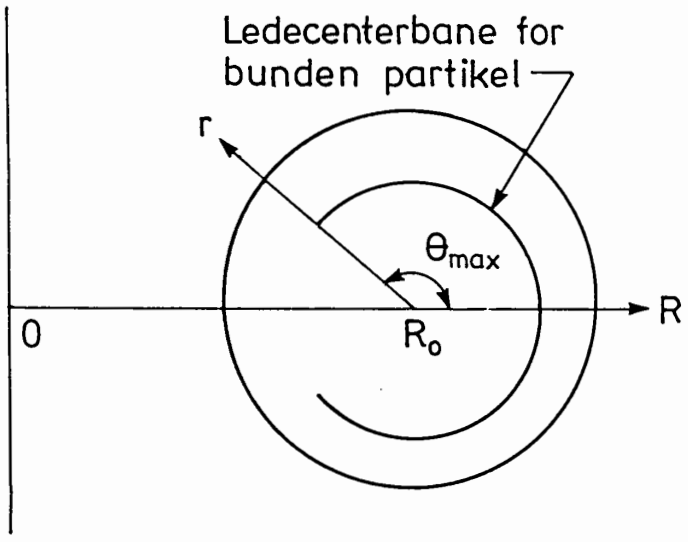

Fig. 6.7. Bundne partikler oscillerer mellem $\pm\,\theta_{max}$.

Hvis vi antager en isotrop hastighedsfordeling i $(r,\theta) = (a,o)$, er forholdet mellem antallet af bundne partikler og det totale antal partikler lig

$$\cos \alpha_o = (1 - f_M)^{1/2} \simeq \sqrt{2\varepsilon} \,. \tag{6.57}$$

En relativ stor brøkdel af partiklerne i en tokamak er altså bundne. Bemærk, at hvis vi går ind mod plasmaets centrum ved at lade $r \to 0$, finder vi, at en mindre og mindre del af partiklerne er bundne, fordi $\varepsilon(r) \to 0$ for $r \to 0$.

c) Virkning af drifthastigheder

Partikeldrift i en tokamak

I den ovenstående diskussion under a) og b) har vi betragtet partiklernes bevægelser i en så grov tilnærmelse, at deres ledecentre hele tiden har bevæget sig på fluxoverfladen. For at forstå den neoklassiske diffusion må vi gå et skridt videre og også tage i betragtning, at partiklerne udfører driftbevægelser, når de befinder sig i toroidale konfigurationer. I underafsnit 3.2.6 så vi, at såvel $\mathbf{K}\times\mathbf{B}$-driften som ∇B-driften er virksomme. Kombination af (3.31) og (3.33) giver for den resulterede drifthastighed

$$v_{d,res} = \frac{1}{\omega_c R_o}\left(v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2}v_{\perp}^2\right) , \tag{6.58}$$

hvor ω_c er partiklens gyrofrekvens i det toroidale felt. $v_{d,res.}$ går i lodret retning, om den går op eller ned afhænger af ladningens fortegn. I vurderingen af drifthastighedens betydning vil vi vælge at se på partikler, der alle har den karakteristiske fart, $v_{th} = (2\ \kappa T/m)^{1/2}$. For de frie partikler, der i al væsentlighed bevæger sig langs feltlinierne, giver (6.58)

$$v_{d,fri} \simeq \frac{v_{th}^2}{\omega_c R_o} , \tag{6.59}$$

medens vi for bundne partikler, der i al væsentlighed bevæger sig vinkelret på feltlinierne, finder

$$v_{d,bund.} \simeq \frac{v_{th}^2}{2\omega_c R_o} . \tag{6.60}$$

Vi skal nu vurdere disse driftbevægelsers betydning for henholdsvis frie og bundne partiklers baner i de snit, der følger partiklerne i deres bevægelse i toroidal retning.

Frie partikler

Baner for frie partikler

Frie partikler er partikler, som, når de befinder sig i $(r,\theta) = (r,0)$, har hastighedsvektorer, der danner en vinkel med magnetfeltlinierne, der er mindre end α_0. Antager vi isotrop hastighedsfordeling af partikler med fast v_{th}, finder vi, at de frie partiklers middelhastighed parallelt med magnetfeltlinierne er

$$\begin{aligned} \langle v_{\parallel}\rangle_{fri} &= v_{th}\left(\frac{1+\cos\alpha_o}{2}\right) \\ &\simeq v_{th} . \end{aligned} \tag{6.61}$$

På Fig. 6.8 ser vi på ledecenterbanen for en fri partikel i et snit, der følger partiklen. Ved hjælp af notationen på figuren finder vi følgende udtryk til bestemmelse af ledecentrets r-position som funktion af θ

$$\frac{dr}{dt} = v_d \sin\theta(t) \tag{6.62}$$

og

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\parallel}{q\,R_o}\,. \tag{6.63}$$

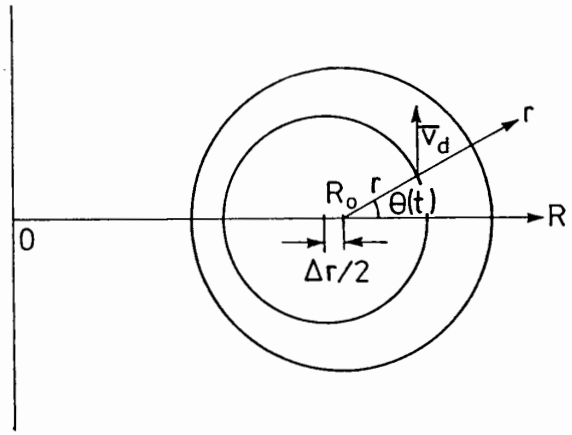

Fig. 6.8. Ledecenterbane for fri partikel, når driftbevægelsen er medregnet

Indsættes (6.58) og (6.61) findes

$$\frac{dr}{dt} = \frac{v_{th}^2}{\omega_c R_o} \sin\frac{v_{th}t}{q\,R_o}\,. \tag{6.64}$$

Vi definerer $\Delta r = r(\theta = \pi) - r(\theta = 0)$ og finder ved integration af (6.64)

$$\Delta r = \frac{v_{th}^2}{\omega_c R_o} \int_o^{\frac{\pi R_o q}{v_{th}}} \sin\frac{v_{th}T}{q\,R_o}\,dt$$

$$= 2q\,r_c\,, \tag{6.65}$$

hvor

$$r_c = \frac{m\,v_{th}}{q\,B_{to}} \tag{6.66}$$

er gyroradius for en partikel, der bevæger sig med hastigheden v_{th} vinkelret på B_{to}-feltet.

Som det fremgår af Fig. 6.8, bliver ledecenterbanen for en ladet partikel med god tilnærmelse en cirkel, hvis centrum er forskudt $\Delta r/2 \simeq q\, r_c$ i vandret retning fra den magnetiske akse ved $R = R_0$. Bemærk, at en partikel, der bevæger sig den anden vej rundt i toroidal retning, vil have centrum for sin ledecenterbane forskudt $\Delta r/2$ mod større R-værdier.

Bundne partikler

Bananbaner

Bundne partikler er partikler, som, når de befinder sig i (r,0), har hastighedsvektorer, der danner vinkler større end α_0 med magnetfeltlinierne. Antager vi, at alle partiklerne i (r,0) har isotrop hastighedsfordeling med farten v_{th}, finder vi, at middelhastigheden i toroidal retning for de bundne partikler i dette punkt er

$$\langle v_{\parallel} \rangle_{\text{bund.}} = v_{th} \frac{1}{2} \cos \alpha_o$$

$$\simeq v_{th} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}} . \qquad (6.67)$$

En karakteristisk bunden partikel vil reflekteres ved en θ_{max}-værdi nær $\pi/2$, (se Fig. 6.7). Mellem to passagerer gennem (r,0) har partiklen i alt bevæget sig et stykke

$$L_{\text{kar}} \simeq \pi\, q\, R_o . \qquad (6.68)$$

Da partiklen i (r,0) har den parallelle hastighed, der er givet i (6.67), og da den ligger stille i (r, θ_{max}), vil vi for en karakteristisk middelhastighed vælge $1/2 \, \langle v_{\parallel} \rangle_{\text{bund}}$. For den karakteristiske tid mellem to passager gennem (r,0) finder vi derfor

$$T_{\text{kar}} \simeq \frac{L_{\text{kar}}}{\frac{1}{2}\langle v_{\parallel} \rangle_{\text{bund}}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,\pi\, q\, R_o}{v_{th}\, \varepsilon^{1/2}} . \qquad (6.69)$$

I løbet af denne tid ændres partiklens radielle position på samme måde, som det er diskuteret for en fri partikel i forbindelse med (6.62) og Fig. 6.8. Den tidsafledede af r er forsvindende, når $\theta \simeq 0$, men nær ved v_d for $\theta \simeq \pi/2$. Som en karakteristisk middelværdi vælger vi $v_{d,\,\text{bund}}/2$ for r's ændringshastig-

hed. Ved brug af (6.60) og (6.69) findes for ændringen i partiklens r-værdi mellem to passager gennem $\theta = 0$.

$$\Delta r = \frac{1}{2} v_{d,bund} \cdot T_{kar}$$

$$\simeq 2 q r_c \varepsilon^{-1/2} . \qquad (6.70)$$

Ledecenterbanen for den her behandlede bundne partikel får det karakteristiske forløb, som er vist på Fig. 6.9. Andre bundne partikler med andre hastigheder i (r,0) vil have tilsvarende baner blot med større eller mindre θ_{max}-værdier. På grund af banernes form kaldes de ofte bananbaner. Den karakteristiske tykkelse af disse bananbaner er givet ved (6.70). Bemærk, at med definitionerne af ε og q i (5.16) og (5.17) kan (6.70) skrives

Bananbanetykkelse

$$\Delta r \simeq 2 r_{cp} \sqrt{\varepsilon} , \qquad (6.71)$$

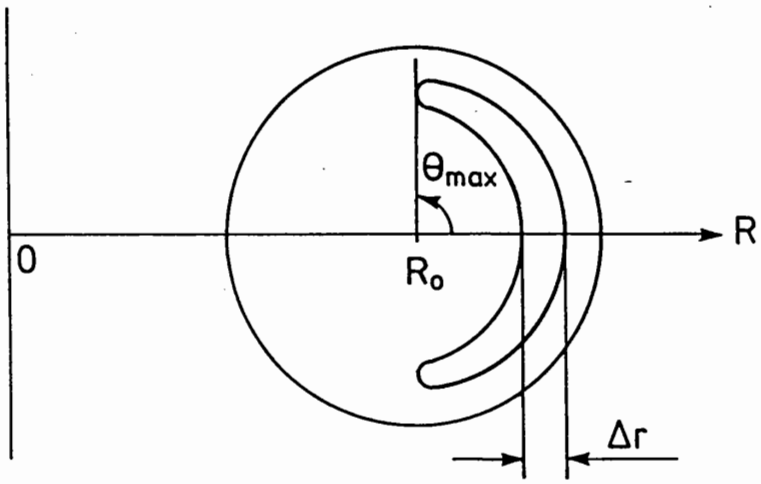

Fig. 6.9. Bananbane for ledecentret af en bunden partikel med $\theta_{max} = \pi/2$.

hvor r_{cp} er den termiske partikels gyroradius i det polære felt. Bananbanetykkelsen er altså af samme størrelsesorden som partiklernes gyroradius i det polære felt.

Konklusionen af dette underafsnit er altså at partiklerne i en tokamak deles op i to grupper:

- de fri partikler, som udgør en del på ca. $1 - (2\varepsilon)^{1/2}$ af alle partiklerne, bevæger sig frit i den toroidale retning. Disse partiklers driftbevægelse

bevirker, at deres ledecenterbaner i snit, der følger partiklernes bevægelse i toroidal retning, er cirkler, hvis centre er forskudt $\Delta r \simeq \pm 2\, q\, r_c$ i $\hat{\mathbf{R}}$-retningen.

- de bundne partikler, som udgør en del på ca. $(2\varepsilon)^{1/2}$ af alle partiklerne, reflekteres mellem to magnetiske spejlpunkter i deres toroidale bevægelse. Disse partiklers driftbevægelse bevirker, at deres ledecenterbaner i de polære snit får form som bananer med en tykkelse, der karakteristisk er $\Delta r = 2\, q\, r_c\, \varepsilon^{-1/2}$.

6.3.2. Diffusionskoefficient for neoklassisk diffusion

Ved hjælp af resultaterne fra sidste underafsnit er vi nu i stand til at vurdere størrelse og parameterafhængighed af diffusionskoefficienterne for neoklassisk diffusion i en tokamak. Det er også her kollisioner mellem elektroner og ioner, der betinger diffusionen. Mellem to kollisioner bevæger partiklerne sig i baner som beskrevet i sidste underafsnit. Ved en elektron-ionkollision ændres elektronen retning og dermed dens bane drastisk. Den springer fra en bane, det være sig en forskudt cirkelbane, hvis den er fri, eller en bananbane, hvis den er bundet, til enten en ny cirkelbane eller en ny bananbane. Det karakteristiske spring i $\mathbf{r}$-retningen bliver Δr som givet ved (6.65) og (6.71). Ionen, som den støder mod, ændrer også sin bane, men meget mindre drastisk, da dens hastighedsændring under stødet er m_i/m_e gange mindre end elektronens. Da vi i underafsnit 6.2.1 diskuterede klassisk diffusion i magnetfelt med rette feltlinier, fandt vi, at en elektron-ionkollision flyttede de to stødende partiklers gyrocentre lige langt og i samme retning. Vi kunne deraf slutte, at elektronerne og ioner ville diffundere lige hurtigt, således at der ikke opbyggedes rumladningstætheder med deraf følgende elektriske felter. Sådan er det ikke ved neoklassisk diffusion. Springene, Δr, der følger efter en elektron-ionkollision, er ikke lige store for de to partikler. Derfor vil man finde, at de neoklassiske diffusionskoefficienter er forskellige for de to partikelarter, og man ville derfor umiddelbart kunne tro, at de ville diffundere med forskellig hastighed. Sådan kan det imidlertid ikke være, fordi forskellig diffusionshastighed ville føre til opbygning af rumladninger med deraf følgende elektriske felter. Under diskussioner af Debye-længden i underafsnit 2.3.2 har vi set, at der i et plasma ikke kan opstå væsentlige afvigelser fra ladningsneutralitet og altså ikke opbygges væsentlig rumladningstætheder. Ved neoklassisk diffusion undgås opbygning af de store rumladninger på den måde, at når den hurtigst diffunderende partikelart er kommet lidt foran den langsommere, vil der være en tendens til ladningsadskillelse som vil inducere et elektrisk felt. Dette elektriske felt vil virke bremsende på de hurtigt diffunderende partikler og accelererende på de langsommere. Resultatet bliver, at

de to partikelarter tvinges til at følges ad i deres diffusion. Denne diffusionsmekanisme, der tvinger de to partikkelarter til at følges ad, kaldes ambipolar diffusion.

Ambipolar diffusion

Det kan vises, at den fælles diffusionskoefficient for den ambipolare diffusion kun afviger med en talfaktor af størrelsesordenen én fra den diffusionskoefficient, der kan udledes ud fra de partikelbaner, vi diskuterede i sidste underafsnit. Vi vil nu udlede et udtryk for elektronernes neoklassiske diffusionskoefficient som funktion af kollisionsfrekvensen ν_{ei} mellem elektroner og ioner. Det viser sig, at diffusionsmekanismen afhænger stærkt af kollisionsfrekvensen, og vi deler derfor behandlingen op i tre frekvensområder:

Diffusionskoefficientens tre frekvensområder

- Det næsten kollisionsfri område, bananområdet: $\nu_{ei} \langle \frac{\varepsilon^{3/2} v_{th}}{q R_o}$.

- Plateauområdet : $\frac{\varepsilon^{3/2} v_{th}}{q R_o} \langle \nu_{ei} \langle \frac{v_{th}}{q R_o}$.

- Pfirsch-Schlüter området : $\nu_{ei} \rangle \frac{v_{th}}{q R_o}$.

Det ses direkte, at i det næsten kollisionsfrie område er kollisionsfrekvensen så lille, at en elektron kan gennemløbe flere forskudte cirkelbaner eller bananbaner mellem to kollisioner. I Pfirsch-Schlüter-området vil elektronen derimod kollidere mange gange inden for den tid, det ville tage at gennemløbe sådanne baner; banerne blive derfor ikke gennemløbet. Endelig er plateauområdet det mellemområde, hvor gennemløbsfrekvensen i de nævnte baner er sammenlignelig med kollisionsfrekvensen.

Det næsten kollisionsfri område, bananbaneområdet

Diffusionskoefficienten i dette stødfrekvensområde blev først vurderet af de russiske forskere A.A. Galeev og R.Z. Segdeev i 1968, og vi vil her følge deres meget grove vurderingsmetode. Mellem to stød vil såvel de frie som de bundne partikler kunne gennemføre flere gennemløb af henholdsvis de forskudte cirkelbaner og bananbanerne. Som vist i underafsnit 6.3.1 er det partiklerne i bananbanerne, der har de største Δr-ekskursioner omkring deres middelposition. Disse ekskursioner effektueres som tilfældige forskydninger af middelpositionen med skridtlængder af størrelsesordenen $\Delta r/2$, som givet i (6.71), når en partikel ved et stød slås ud af sin bananbane og fortsætter i en forskudt cirkel. For at finde et udtryk for diffusionskoefficienten er det også nødvendigt at finde frekvensen, hvormed bundne partikler i bananbaner stødes ind i de forskudte cirkelbaner. I punktet (r,0) har de bundne partikler, der bevæger sig den ene vej rundt i toroidal retning, hastighedsvektorer, hvis vinkler med magnetfelter ligger mellem $\pi/2$ og α_o givet ved (6.56). De dækker altså en vinkel, α_b, givet ved

$$\sin \alpha_b \simeq \sqrt{2\varepsilon} \tag{6.72}$$

eller

$$\alpha_b \simeq \sqrt{2\varepsilon} \,. \tag{6.73}$$

For at blive stødt ud af denne vinkel og ind i vinkelrummet for de frie partikler skal hastighederne drejes en vinkel af størrelsesordenen

$$\Delta\alpha_b \simeq \sqrt{\varepsilon} \,. \tag{6.74}$$

Det betyder, at de bundne partikler er blevet frie efter en vinkeldrejning på kun $\varepsilon^{1/2}$, som jo er meget mindre end de 90°, som opnås efter en tid på ν_{ei}^{-1}. For at vurdere den effektive frekvens ν_{eff}, hvormed bundne partikler stødes ind i fri baner, bemærker vi, at afbøjningen af en partikels hastighed i et plasma fremkommer som den akkumulerede sum af mange små afbøjninger i alle retninger. Dette er allerede omtalt under diskussionen af l_{korr} i formel (2.26). Det betyder, at afbøjningen af en partikels bane kan opfattes som en diffusionsproces i hastighedsrummet. Vi kan derfor benytte, at ved en diffusionsproces er den tid, det varer at opnå en vis spredning, proportional med kvadratet på spredningen. I vort tilfælde kan det udtrykkes som $(\Delta\alpha)^2 \propto t$.

Ved brug af (6.74) finder vi derfor

$$\begin{aligned} \nu_{\text{eff}} &= \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{(\Delta\alpha_b)^2}\,\nu_{ei} \\ &\simeq \frac{\nu_{ei}}{\varepsilon} \,. \end{aligned} \tag{6.75}$$

Indsættes $\Delta r/2$ fra (6.70) for det karakteristiske skridt og ν_{eff} for den effektive frekvens i (6.2) og benyttes, at kun brøkdelen $(2\varepsilon)^{1/2}$ af alle partiklerne løber i bananbaner, finder vi for diffusionskoefficienten i dette bananbaneområde

$$\begin{aligned} D^B &= \left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2 \nu_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2\varepsilon} \\ &\simeq q^2\, \varepsilon^{-3/2}\, r_c^2 \cdot \nu_{ei} \,. \end{aligned} \tag{6.76}$$

Diffusionskoefficienten i bananbaneområdet

Af (6.76) følger, at den neoklassiske diffusionskoefficient er $q^2\, \varepsilon^{-3/2} \simeq 100$ gange større end den klassiske i dette frekvensområde. På Fig. 6.10 er D^B indtegnet som funktion af ν_{ei} sammen med den klassiske diffusionskoeffici-

ent, $D_\perp$, som er givet ved (6.2). Ved brug af (6.69) ses, at den karakteristiske frekvens for gennemløb af bananbanerne er $v_{th}\ \varepsilon^{1/2}/q\ R_o$. Da den effektive frekvens for at slå partikler ud af bananbaner ifølge (6.75) er $\varepsilon^{-1}\ \nu_{ei}$, ses, at bananbanediffusion kun gælder for $\nu_{ei} \lesssim v_{th}\ \varepsilon^{3/2}/q\ R_o$.

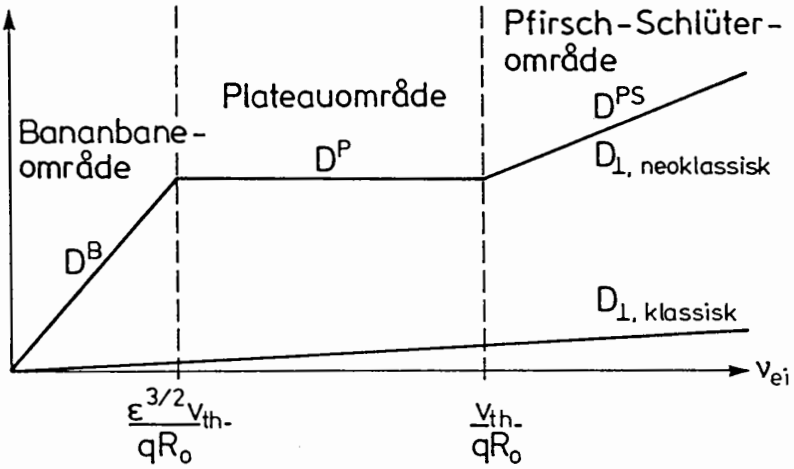

Fig. 6.10. Neoklassisk diffusionskoefficient

Pfirsch-Schlüter-området

I dette stødfrekvensområde er tiden mellem to stød meget mindre end den tid, det tager en termisk partikel at bevæge sig q gange rundt i toroidal retning og dermed en gang rundt i polær retning. Partiklen støder altså så ofte, at den mellem to stød kun når at gennemløbe en lille del af en forskudt cirkel eller en bananbane i et polært snit. En karakteristisk bane for ledecentret af en sådan partikel i et polært snit, der følger partiklen i dens toroidale

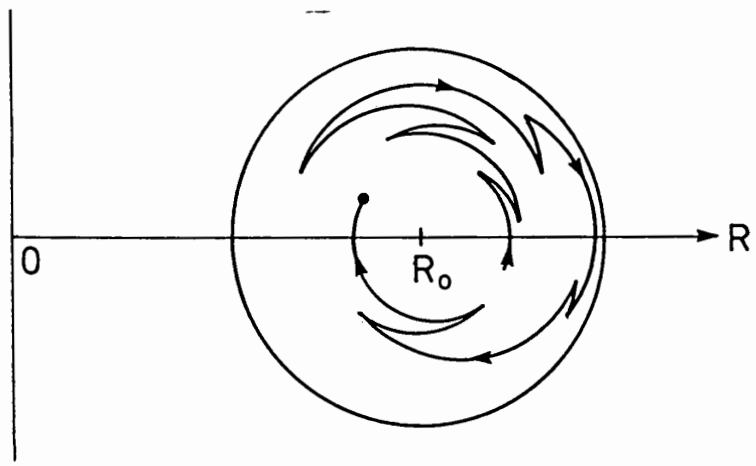

Fig. 6.11. Ledecenterbane i polært snit for partikel med mange stød

bevægelse, er vist på Fig. 6.11. I tiden mellem to stød vil partiklen bevæge sig langs magnetfeltlinierne samtidig med, at den lodrette driftbevægelse får den til at drive gennem fluxfladerne.

Hvis, som på figuren, drifthastigheden er opadrettet og partiklen befinder sig over midtplanen vil den drive mod større og større r-værdier. Når partiklen befinder sig under midtplanen, vil den drive mod mindre og mindre r-værdier. I begge tilfælde er r's ændringshastighed af størrelsesordenen v_d som givet ved (6.59) eller (6.60). Om og hvor længe partiklen befinder sig over eller under midtplanen er bestemt ved en stokastisk funktion. For at bevæge sig fra en position over midtplanen til en position under denne plan skal den karakteristisk diffundere et stykke $L \simeq q\, R_0$ langs feltlinierne. Karakteristisk vil denne diffusion tage tiden:

$$t_{\mathrm{kar}} \simeq \frac{(q\, R_o)^2}{D_{\|}} , \tag{6.77}$$

hvor den parallelle diffusionskoefficient, $D_{\|}$ ved brug af (A.5.7) kan skrives

$$D_{\|} \simeq \frac{v_{th}^2}{\nu_{ie}} . \tag{6.78}$$

Det karakteristiske skridt i $\hat{\mathbf{r}}$-retningen, der opnås i løbet af $t_{kar,}$ er

$$\Delta r_{\mathrm{kar}} = v_d \cdot t_{\mathrm{kar}} . \tag{6.79}$$

Kombination af (6.59), (6.77), (6.78) og (6.79) giver følgende udtryk for den neoklassiske diffusionskoefficient i Pfirsch-Schlüter-området

$$\begin{aligned} D^{P.S.} &= (\Delta r_{\mathrm{kar}})^2\, t_{\mathrm{kar}}^{-1} \\ &= q^2\, r_c^2\, \nu_{ei} . \end{aligned} \tag{6.80}$$

Pfirsch-Schlüters diffusionskoefficient

I dette Pfirsch-Schlüter-område finder vi altså, at den neoklassiske diffusionskoefficient er ca. $q^2 \simeq 10$ gange større end den klassiske diffusionskoefficient. Grunden er den simple, at den karakteristiske længde af de tilfældige skridt i r-retningen er meget større end gyroradierne fordi den er bestemt af partiklernes driftbevægelse. Den neoklassiske diffusionskoefficient $D^{P.S.}$ i dette område er også indtegnet på Fig. 6.10.

Plateauområdet

I dette stødfrekvensområde er tiden mellem to stød af samme størrelsesorden, som den tid det vil tage en termisk partikel at bevæge sig q gange rundt i toroidal retning. Starter vi i den lavfrekvente ende af dette område og bevæ-

ger os opad, vil vi se, at termiske partikler, der bevæger sig næsten parallelt med magnetfeltlinierne, har større chance for at nå en hel gang rundt uden at støde end partikler, der bevæger sig i en stor vinkel med magnetfeltlinierne. Det er altså de bundne partikler i bananbaner, der har størst sandsynlighed for at blive stødt ud af deres baner. Når stødfrekvensen stiger, gennemfører bananbanepartiklerne en mindre og mindre del af en bananbane mellem to stød. Det karakteristiske skridt i r-retningen mellem to stød bliver derfor mindre og mindre. Vi vil derfor forvente, at den neoklassiske diffusionskoefficient $D^P \propto (\Delta r)^2 \cdot \nu_{ei}$ holder sig ret konstant i dette område og lig med værdien i områdets endepunkter. D^P = konstant i plateauområdet er også indtegnet på Fig. 6.10.

Som det fremgår, ligger den neoklassiske diffusionsfoefficient karakteristisk en faktor 10 til 100 over den klassiske. Denne forøgelse af diffusionskoefficienten er den pris, der må betales for at opnå et plasma, der er holdt stabilt indesluttet i en ligevægtssituation i en tokamakkonfiguration. I slutningen af undereafsnit 6.2.3 så vi, at klassisk diffusion ikke ville være en alvorlig hindring for at opfylde Lawson-kriteriet; vi fandt i (6.52), at der var en margin på mere end tre størrelsesordner. Med den forøgede neoklassiske diffusion på ca. 2 størrelsesordener over den klassiske har vi stadigvæk en margin på ca. én størrelsesorden.

Ifølge (2.39) er kollisionsfrekvensen proportional med $(\kappa T)^{-3/2}$. Heraf fremgår, at jo højere temperatur et plasma har, des lavere er dets kollisionsfrekvens. Ser vi på et fusionsplasma med $n = 10^{20} m^{-3}$ og $\kappa T = 10$ keV, finder vi, at den fri middelvejlængde for elektron-ionstød (se diskussionen i forbindelse med udledningen af formel (2.39)) er af størrelsesordenen $3 \cdot 10^4$ m. Heraf kan sluttes, at en tokamak med et fusionsplasma vil arbejde i bananbaneområdet og altså være udsat for den hurtige D^B-diffusion. Eksperimentelle resultater fra eksisterende tokamakker indicerer overensstemmelse med den neoklassiske diffusion, som er diskuteret her.

6.4. Turbulent diffusion, Bohm-diffusion

Den klassiske og neoklassiske diffusion af plasma vinkelret på magnetfeltlinier, som er behandlet i afsnit 6.3 er uundgåelig i og med, at den er forårsaget af de uundgåelige kollisioner mellem de ladede partikler. Den neoklassiske diffusion vil måske kunne reduceres noget ved passende valg af magnetfeltkonfigurationer. I de fleste af de eksperimenter, der er udført indtil nu, har det vist sig meget svært og oftest umuligt at komme ned på diffusionshastigheder, der svarer til klassisk eller neoklassisk diffusion. Andre og stærkere diffusionsmekanismer er ofte virksomme. Man forestiller sig, at disse diffusionsmekanismer drives af turbulente fluktuationer i plasmaet. Fluktuationerne opstår ved, at en eller flere svingningstilstande i plasmaet bliver ustabile og

vokser op til et højt niveau. Fluktuationerne indeholder hurtigt varierende **E**-felter med komponenter vinkelret på **B**-feltet. Disse **E**-felter bevirker, at partiklerne udsættes for hurtigt varierende $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$-drifthastigheder i tilfældige retninger. Det er disse tilfældige drifthastigheder, der forårsager diffusionen. Turbulent diffusion kan derfor kun undgås, hvis man kan designe et plasmaeksperiment, hvori der ikke optræder ustabile svingninger.

Det første forsøg på at beskrive turbulent diffusion ved en diffusionskoefficient blev gjort af D. Bohm og medarbejdere i 40'erne. De opstillede en fænomenologisk model for et turbulent plasma, og ved hjælp af denne model kunne de udlede en diffusionskoefficient. Vi skal her kort resumere dette arbejde. Vi tænker os, at plasmaet er delt op i magnetiske feltlinierør alle med radius som partiklernes gyroradius, r_c. Rørernes potentialer tænkes at oscillere med en amplitude

$$\phi_{\mathrm{osc}} \simeq \frac{\kappa T}{e} . \tag{6.81}$$

φ_{osc} er den størst mulige svingningsamplitude, hvis φ_{osc} skal være forårsaget af bevægelse af termiske partikler. Til det oscillerende potentiale φ_{osc} svarer et karakteristisk $\mathbf{E}_\perp$-felt

$$E_{\perp\,\mathrm{kar}} \simeq \frac{\kappa T}{r_c\, e} . \tag{6.82}$$

Den karakteristiske $\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ drifthastighed bliver da

$$v_{\mathrm{d,kar}} \simeq \frac{\kappa T}{r_c\, e\, B} . \tag{6.83}$$

Lad os desuden antage, at den karakteristiske frekvens for ændringer i φ_{osc} er gyrofrekvensen $\omega_c = eB/m$. Formel A.5.7 fører da til følgende udtryk for diffusionskoefficienten

$$D \simeq \frac{\kappa T}{e\, B} . \tag{6.84}$$

Bohm foreslog at dividere dette resultat med 16, som så fører til

$$D^{Bohm} \simeq \frac{1}{16}\,\frac{\kappa T}{q\, B} . \tag{6.85}$$

Bohm's diffusionskoefficient

Selvom det kan være svært at argumentere for, at Bohm's diffusionskoefficient skulle gælde for alle plasmaer, fandt man i eksperimenter op til slutningen af 60'erne en slående overensstemmelse med Bohm-diffusionen, og mange troede, at Bohm-diffusionen var en indbygget naturlov, der gjaldt for alle plasmaer.

Bohm's diffusionskoefficient afviger fra den klassiske diffusionskoefficient ved, at den er proportional med temperaturen og kun går som B^{-1}. For et fusionsplasma med den meget høje temperatur er denne κT-afhængighed meget uheldig. Beregner vi D^{Bohm} for vort fusionsplasma med $\kappa T = 10$ keV og $B = 1$ T, finder vi $D^{Bohm} \simeq 6 \cdot 10^3 m^2 s^{-1}$. Dette resultat er ca. 8 størrelsesordener større end den klassiske diffusionskoefficient $D_\perp$ som beregnet i formel (6.49). Det er heraf klart, at hvis Bohm-diffusionen er en naturlov, så vil det aldrig kunne lykkes at bygge en fusionsreaktor, der opfylder Lawson-kriteriet. I slutningen af 60'erne begyndte der at fremkomme rapporter fra eksperimenter, der viste mindre diffusion end svarende til Bohm-diffusionen. Det var en meget stor lettelse for fusionsforskningen at kunne konstatere, at Bohm-diffusionen ikke var en naturlov. Igennem de sidste tyve år er det lykkedes at bygge eksperimenter, hvis diffusion ligger ganske nær den klassiske eller neoklassiske. Men, som det fremgår af kapitel 1, er det endnu ikke lykkes at bygge et fusionseksperiment, hvori Lawson-kriteriet er opfyldt. Den turbulente diffusion er stadig tilstede, men den kan nu holdes langt mindre end Bohm-diffusionen. Hvornår eller om det vil lykkes at bringe den resterende turbulente diffusion ned på et så lavt niveau, at Lawson-kriteriet kan opfyldes, kan kun fremtiden vise. Som det fremgår af Fig. 1.6 har fremskridtene været så betydelige gennem de sidste 20 år, at håbet om, at det vil lykkes, synes velunderbygget.

LITTERATURLISTE

Supplerende læsning og henvisninger

Gennem de sidste ca. 20 år er der udkommet en række lærebøger om plasmafysik og fusionsforskning. I det følgende gives en liste over udvalgte lærebøger, som behandler fusionsrelevante dele af plasmafysikken. På mange af de steder i disse noter, hvor det af plads- og tidsmæssige grunde har været nødvendigt at nøjes med en overfladisk behandling, er der givet henvisninger i kantede paranteser [ ] til nedenstående bøger, hvor mere detaljerede behandlinger kan findes.

[1] Glasstone, S., and R. Lovberg: "Controlled Thermonuclear Reactions" D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N.J., 1960.

[2] Spitzer, L., Jr.: "Physics of Fully Ionized Gases" 2nd ed., Interscience Publishers, Inc., New York, 1962.

[3] Rose, D.J., and M. Clark, Jr.: "Plasmas and Controlled Fusion", The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., and John Wiley & Sons, Inc., New York, 1961.

[4] Tanenbaum, B.S.: "Plasma Physics", McGraw Hill Book Company, New York, 1967.

[5] Miyamoto, K.: "Plasma Physics for Nuclear Fusion", The M.I.T. Press, Cambridge, Mass, 1980.

[6] Kammash, T.: "Fusion Reactor Physics: principles and technology", Ann Arbor Science Publishers, Inc., Ann Arbor, Michigan, 1975.

[7] Stacey, W.M., Jr.: "Fusion Plasma Analysis", John Wiley & Sons, New York, 1981.

[8] Chen, F.F.: "Introduction to Plasma Physics", Plenum Press, New York, 1974. (Second Edition 1984)

[9] Ribe, F.L.: "Fusion Reactor Systems", Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 7-41.

[10] Boyd, T.J.M. and Sanderson, J.J.: "Plasma Dynamics", Nelson, London, 1969.

[11] Plasma Physics and Nuclear Fusion Research, edited by R.D. Gill, Academic Press, London, 1981.

[12] Goedbloed, J.P.: "Lecture Notes on Ideal Magnetohydrodynamics", Rijnhuizen Report 83-145, 1983.

[13] Freidberg, J.P.: "Ideal Magnetohydrodynamic Theory of Magnetic Fusion Systems", Rev. Mod. Phys. 54 (1982), 801-902.
Freidberg, J.P.: "Ideal Magnetohydrodynamics", Plenum Press, New York and London, 1987.

[14] Wesson, J.: "Tokamaks", Clarendon Press, Oxford, 1987.

[15] Carslaw, H.S. and Jaeger, J.C.: "Conduction of Heat in Solids", Oxford University Press, 1951.

[16] Bittencourt, J.A.: "Fundamentals of Plasma Physics", Pergamon Press, Oxford, 1986.

APPENDIKS 1

Fordelingsfunktioner

A.1.1. Definition af fordelingsfunktion

Begrebet hastighedsfordelingsfunktioner bruges i den kinetiske gasteori, hvorfra det er overtaget af plasmafysikken. Det er et nyttigt matematisk begreb at arbejde med, når man studerer mangelegemeproblemer som dem, man møder i gasteori og plasmateori. Det er karakteristisk, at man inden for gas- og plasmafysik arbejder med mange partikler (måske 10^{20}-10^{25}). Det er uoverkommeligt og også uinteressant at følge hver enkelt partikels bevægelse. Man er kun interesseret i visse middelværdier som f.eks. tæthed, temperatur, tryk og middelhastighed (vindhastighed). Sådanne størrelser kan beregnes ved hjælp af fordelingsfunktionerne.

Fordelingsfunktionen, f, er en funktion af hastighedsvektorens tre komponenter v_x, v_y og v_z. I det generelle tilfælde, hvor gassen enten er inhomogen eller ændrer sig med tiden, afhænger f også af rumkoordinaterne, (x,y,z), og af tiden, t. Her betragter vi kun den homogene og tidsuafhængige situation. Hver partikelart i gassen tilskrives en fordelingsfunktion, f, som er defineret ved, at størrelsen $f(v_x, v_y, v_z)dv_xdv_ydv_z$ er lig med antallet partikler pr. rumenhed, som har hastighedskomponenter i $\hat{\mathbf{x}}$-retningen liggende i intervallet dv_x omkring v_x, og som tilsvarende har hastighedskomponenter i $\hat{\mathbf{y}}$-retningen liggende i intervallet dv_y omkring v_y, og som endelig har hastighedskomponenter i $\hat{\mathbf{z}}$-retningen liggende i intervallet dv_z omkring v_z. Se tegningen på Fig. A.1.1. Hvis vi definerer $dv_xdv_ydv_z \equiv d^3\mathbf{v}$ og $\mathbf{v} \equiv (v_x,v_y,v_z)$, kortes fordelingsfunktionens definition ned til, at $f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v}$ er antallet af partikler pr. rumenhed, hvis hastighedsvektorer ligger i rumelementet $d^3\mathbf{v}$ omkring $\mathbf{v}$.

Det fremgår direkte ud fra den givne definition, at integralet af fordelingsfunktionen over de tre hastighedskomponenter fra $-\infty$ til $+\infty$ er lig med partikeltætheden, altså at

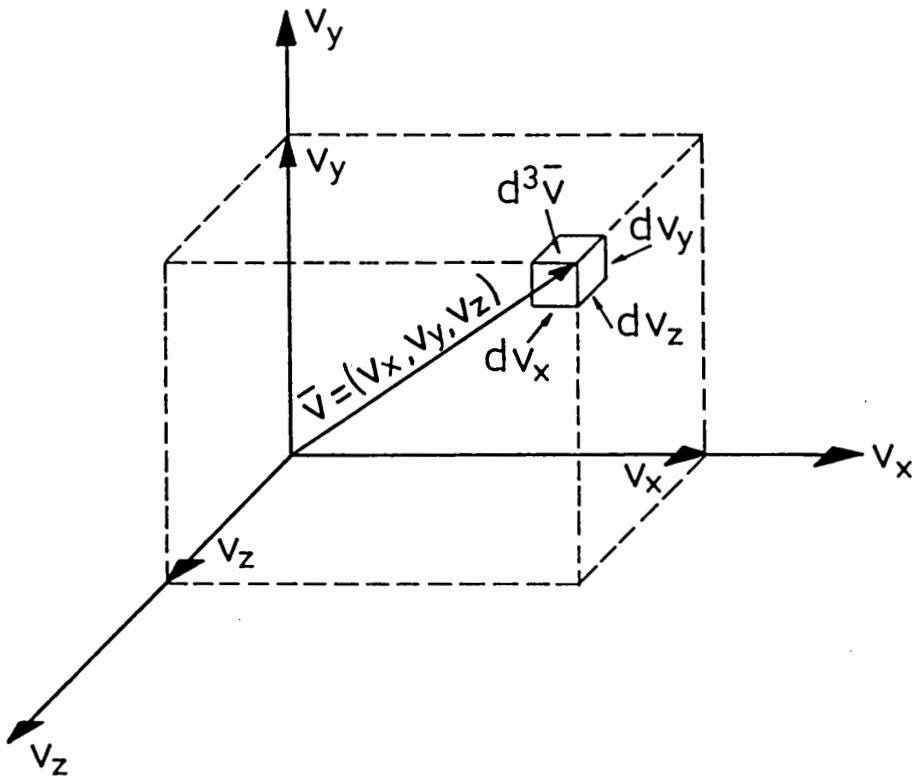

Fig. A.1.1. Grafisk fremstilling af hastighedsintervaller.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int\int f(v_x,v_y,v_z)dv_x dv_y dv_z = n\,, \tag{A.1.1}$$

dette udtryk skrives ofte på formen

$$\int f(\mathbf{v})d^3\mathbf{v} = n\,, \tag{A.1.2}$$

hvor det så er underforstået, at der skal udføres tre v-integrationer, alle fra $-\infty$ til $+\infty$.

Beregnes udtrykket

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x,v_y,v_z)dv_y dv_z = f(v_x)\,, \tag{A.1.3}$$

er det klart, at $f(v_x)$ er den éndimensionale fordelingsfunktion defineret ved, at $f(v_x)dv_x$ er antallet af partikler pr. rumenhed, hvis hastighedskomponent i $\hat{\mathbf{x}}$ -retningen ligger i intervallet dv_x omkring v_x.

A.1.2. Termisk ligevægt. Maxwellfordelingen

Hvis en gas med en tilfældig fordelingsfunktion overlades til sig selv, vil stød mellem de enkelte partikler bevirke, at fordelingsfunktionen asymptotisk nærmer sig til en standardfordeling, den såkaldte Maxwellfordeling, som er

$$f(v_x, v_y, v_z) = n \left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2\kappa T}\right\} . \qquad \text{(A.1.4)}$$

m er partiklernes masse, κ er Boltzmann's konstant = $1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K, og T er temperaturen. Det er kun, når gassens fordelingsfunktion har antaget Maxwellformen (A.1.4), at det er korrekt at tilskrive den en temperatur.

For argumentation for, at stød i en gas altid vil resultere i en Maxwellfordeling, henvises til lærebøger i kinetisk gasteori.

I de følgende udledninger har vi brug for nogle kendte bestemte integraler, som gives her

$$J_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

$$J_1 = \int_0^\infty x\, e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2\lambda}$$

$$J_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}$$

$$J_3 = \int_0^\infty x^3 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{2\lambda^2}$$

$$J_4 = \int_0^\infty x^4 e^{-\lambda x^2} dx = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^5}} .$$

Ved hjælp af udtrykket for J_0 ses det direkte, at Maxwellfordelingen (A.1.4) har den krævede egenskab, at

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int\int f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = n \ .$$

Integreres (A.1.4) over to hastigheder f.eks. v_y og v_z, fås den éndimensionale Maxwellfordeling svarende til (A.1.3)

$$f(v_x) = n\left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{mv_x^2}{2\kappa T}\right\} \ . \qquad \text{(A.1.5)}$$

Maxwellfordelingen (A.1.4) er, som det også må forventes, isotrop dvs. retningsuafhængig. Det ses af, at den kun afhænger af den numeriske hastighed eller farten $v = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)^{1/2}$. Hvis man vil udtrykke Maxwellfordelingen som funktion af v alene, betaler det sig at arbejde i et sfærisk koordinatsystem, hvor rumelementet er $4\pi v^2 dv$. Man finder

$$f(v) = 4\pi n\left(\frac{m}{2\pi\kappa T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left\{-\frac{mv^2}{2\kappa T}\right\} \ . \qquad \text{(A.1.6)}$$

f(v) er altså defineret ved, at f(v)dv angiver antallet af partikler pr. rumenhed, hvis fart ligger i elementet dv omkring v. f(v)'s forløb er skitseret på Fig. A.1.2.

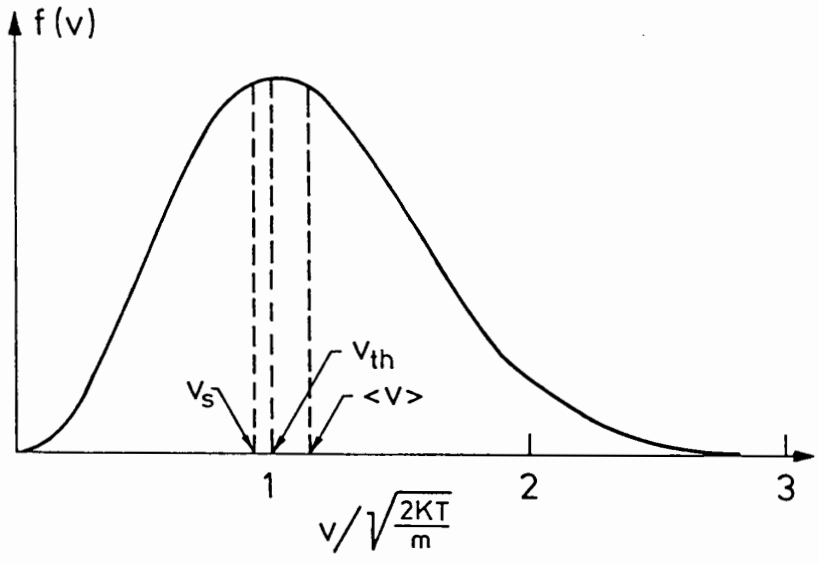

Fig. A.1.2. Fordelingsfunktionen (A.1.6) med de karakteristiske hastigheder markeret.

Ud fra (A.1.6) kan man beregne forskellige karakteristiske størrelser. Vi ser først på den translatoriske energitæthed i en gas. En partikel med farten v har

den kinetiske energi $mv^2/2$. Antallet af partikler pr. rumenhed i gassen med denne energi er f(v)dv, dvs. disse partikler har tilsammen energien $\frac{1}{2}mv^2f(v)dv$. Indsættes heri f(v) fra (A.1.6) og integreres over alle v-værdier, fås den translatoriske energitæthed

$$E_t = \frac{3}{2}n\kappa T\,. \tag{A.1.7}$$

For en monoatomig gas og dermed for et plasma er translatorisk energi den eneste form for kinetisk energi (ingen rotationsenergi). (A.1.7) giver så direkte, at varmefylden pr. rumenhed for gassen ved konstant rumfang er $\frac{3}{2}n\kappa$. Endelig får vi også fra (A.1.7), at middelenergien pr. partikel er

$$\langle E_p\rangle = \frac{3}{2}\kappa T\,. \tag{A.1.8}$$

Den mest sandsynlige fart svarer til den v-værdi, hvor kurven på Fig. A.1.2 har maximum. Denne værdi er

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2\kappa T}{m}}\,. \tag{A.1.9}$$

v_{th} står for v termisk. v_{th} repræsenterer en karakteristisk fart i partiklernes termiske bevægelse.

Ved hjælp af tilsvarende argumenter, som blev brugt ved beregningen af E_t, fås for middelværdien af farten

$$\langle v\rangle = \frac{\int_o^\infty vf(v)dv}{n} = \sqrt{\frac{8\kappa T}{\pi m}}\,. \tag{A.1.10}$$

Ved hjælp af den éndimensionale fordelingsfunktion (A.1.5) kan trykket i gassen beregnes. Trykket er defineret som kraften pr. vægarealenhed, hvilket igen ifølge Newton's anden lov er lig den impuls, som arealenheden pr. tidsenhed modtager fra partiklerne. x-aksen lægges, så den skærer vinkelret gennem den væg, hvorpå trykket ønskes beregnet. Se Fig. A.1.3. Hvis der er termisk ligevægt mellem væg og gas - og det antages der at være - så vil væggen, hver gang den rammes af en partikel med hastighed v_x, reflektere en partikel med hastigheden $-v_x$. Ved en sådan reflektion ændres bevægelsesmængden med $2mv_x$. Arealenheden får altså en impulspåvirkning $2mv_x$. I løbet af en tid Δt vil alle de partikler med hastighed v_x, som befinder sig i en kasse med arealenheden som endeflade og længden $v_x\Delta t$, ramme arealenheden. Dette antal er $\Delta tv_xf(v_x)\,dv_x$, og det giver arealenheden impulspåvirkningen $2mv_x\Delta tv_x\,f(v_x)dv_x$.

For at få den samlede impulspåvirkning integreres over alle positive hastigheder. Partikler med negative v_x bevæger sig væk fra væggen og rammer den derfor ikke. Den samlede impulspåvirkning er

$$\int_o^\infty 2mv_x \Delta t v_x f(v_x) dv_x \ ,$$

som, når $f(v_x)$ fra (A.1.5) er indsat, beregnes til $\Delta t\ n\kappa T$. Da trykket er impulsen pr. tidsenhed, fås

$$p = n\kappa T \ . \qquad \text{(A.1.11)}$$

Bemærk, at trykket er 2/3 af den translatoriske energitæthed, (A.1.7).

Endelig mindes der om, at lydhastigheden i en monoatomigt gas er

$$v_s = \sqrt{\frac{5\kappa T}{3m}} \ . \qquad \text{(A.1.12)}$$

Denne hastighed er også indtegnet på Fig. A.1.2.

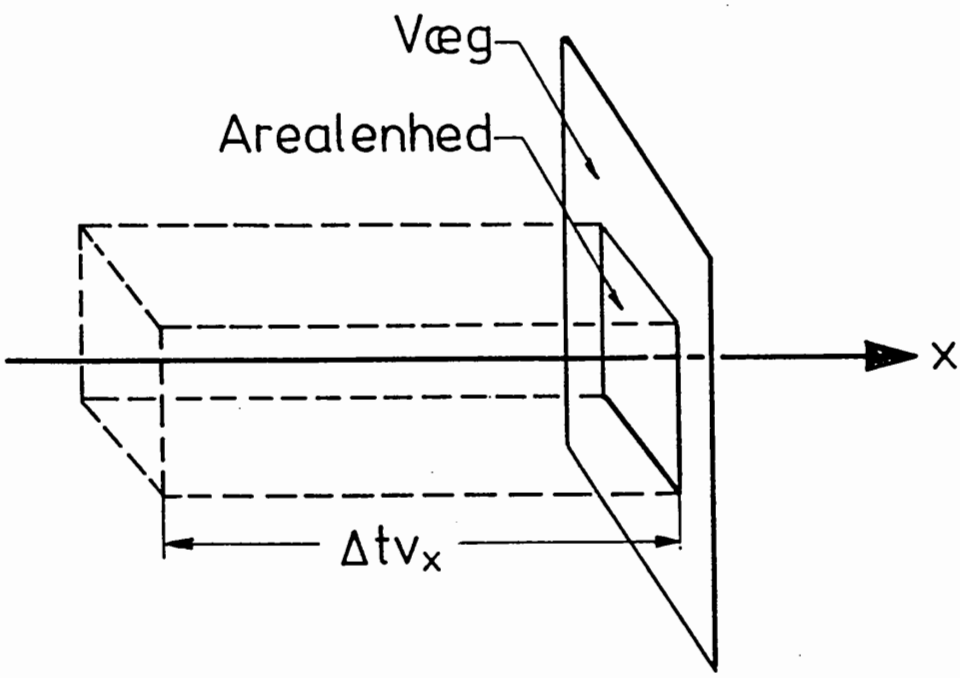

Fig. A.1.3. Trykberegningen

APPENDIKS 2

Kollisionsprocesser

Mange fysiske processer er betinget af en form for kollision mellem de partikler, der skal reagere med hinanden. Der kan være tale om egentligt atomare processer, hvor der sker en fysisk omdannelse af de reagerende partikler som f.eks. ved fusionsprocesser; men der kan også være tale om almindelige stød, hvor to partikler blot vekselvirker på en sådan måde, at deres hastigheder ændres. Inden for den del af fysikken, der behandler sådanne kollisionsprocesser, arbejder man med begrebet reaktionstværsnit.

A.2.1. Tværsnit for kollisionsprocesser

For at forklare begrebet reaktionstværsnit, betragtes følgende situation: man ønsker at få en proces til at forløbe mellem to partikler A og B. Lad partikel A ligge stille, medens B accelereres til en passende høj hastighed og rettes mod A, se Fig. A.2.1. Vi ser på forholdene i det plan a, der ligger vinkelret på B's uperturberede bane, og som indeholder A. Ved B's uperturberede bane forstås

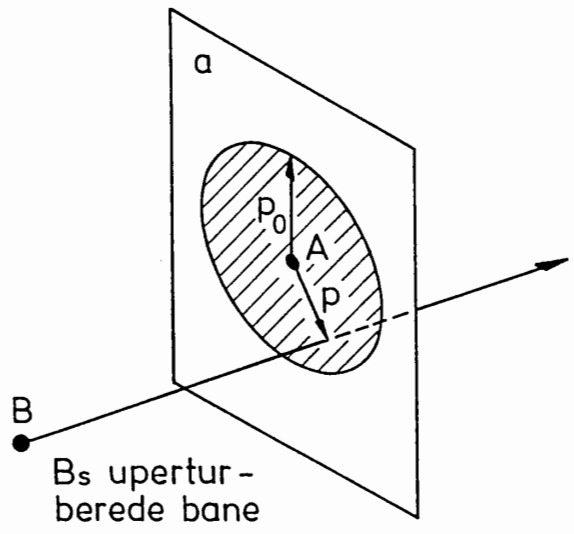

Fig. A.2.1. Tværsnit for proces mellem A og B. p aktuel stødparameter. p_0 grænseværdi for stødparameter. $\sigma = \pi p_0^2$ tværsnit for processen.

forlængelsen af B's bane, før den begynder en eventuel vekselvirkning med A. Afstanden mellem den uperturberede banes spor i a og A kaldes stødparameteren og benævnes p. Hvis p er tilstrækkelig lille og mindre end en grænseværdi p_o, kommer A og B hinanden tilstrækkeligt nær til, at processen vil forløbe. πp_0^2 er altså det areal, inden for hvilket B's uperturberede bane skal skære planen a for at processen vil ske. πp_0^2 kaldes processens tværsnit og benævnes σ. σ afhænger normalt af B's hastighed og dermed af B's eneregi.

Atomare reaktionstværsnit måles ofte i enheden barn, hvor 1 barn = 10^{-24} cm^2 = 10^{-28} m^2.

A.2.2. Reaktionshastigheder

Vi betragter nu en situation, hvor vi har en gas af hvilende partikler af typen A med tætheden n_A. Gennem denne gas strømmer en anden gas af B-partikler med hastigheden v og tætheden n_B. Tværsnittet $\sigma(v)$ for en proces mellem A- og B-partikler tænkes kendt, og vi skal nu beregne reaktionshastigheden, R(v), for denne proces.

Lad os antage, at B-partiklerne bevæger sig i $\hat{x}$-retningen. Vi ser på en arealenhed af et tyndt lag af A-partikler. Laget ligger vinkelret på $\hat{x}$-retningen og har tykkelsen Δx, se Fig. A.2.2. Dette tynde lag indeholder $n_A \Delta x$ A-partikler. Tilsammen repræsenterer disse partikler så et samlet tværsnit $\sigma(v) n_A \Delta x$.

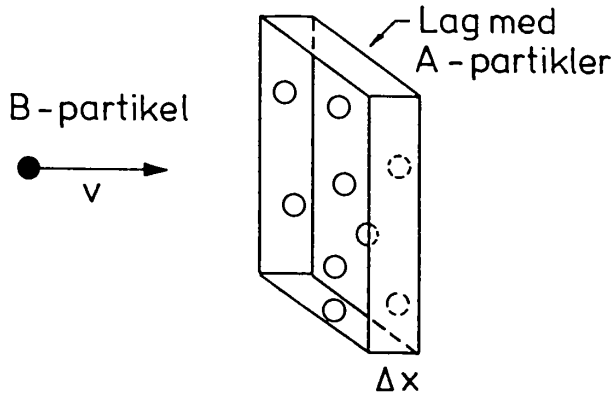

Fig. A.2.2. B-partikels passage gennem en arealenhed af et lag med A-partikler.

En B-partikel, der passerer ind i laget, vil have en sandsynlighed for i laget at reagere med en A-partikel, som er lig forholdet mellem dette samlede tværsnit og arealet af arealenheden, altså lig $\sigma(v) n_A \Delta x$. Det tager B-partiklen en tid $\Delta t = \Delta x / v$ at passere gennem laget; det betyder, at den i løbet af tiden Δt har sandsynligheden $\sigma(v) n_A v \Delta t$ for at reagere. Da der er n_B B-partikler pr. rumenhed, og de alle har denne sandsynlighed for at reagere med en A-partikel i løbet af tiden Δt, sker der ialt $\sigma(v) n_A n_B v \Delta t$ reaktioner pr. rumenhed i tiden

Δt. Reaktionshastigheden, der angiver antallet af reaktioner pr. rumenhed pr. sekund, er altså

$$R(v) = v\sigma(v)n_A n_B \ . \qquad \text{(A.2.1)}$$

A.2.3. Fri middelvejlængde

Ved begrebet fri middelvejlængde forstås den vejlængde, som en partikel i en gas i middel kan bevæge sig, før den reagerer med en anden partikel. For at beregne den fri middelvejlængde tænker vi os, at et ensemble på N_0 partikler med hastigheden v starter ved x = o og bevæger sig ind i en gas i $\hat{x}$-retningen.

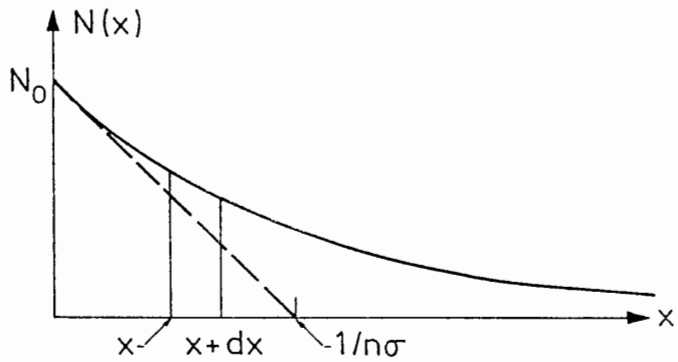

Fig. A.2.3. Partiklers indtrængen i gas.

Se Fig. A.2.3. Gassens tæthed er n, og tværsnittet for reaktioner mellem gaspartikler og ensemblepartikler er σ(v). Den del af de N_0 partikler, der når at passere positionen x uden at have reageret med en gaspartikel, kaldes N(x). Vi har altså, at N(o) = N_0, og at N(x) må være en aftagende funktion af x. Som allerede vist i A.2.2 er sandsynligheden for, at en partikel reagerer i intervallet mellem x og x + dx lig med σ(v)ndx, dvs. at af de N(x) partikler, der passerer x, reagerer N(x)σ(v)ndx i intervallet mellem x og x + dx. For ændringen i N(x) over dette interval har vi da

$$dN(x) = -N(x)\sigma(v)ndx \ , \qquad \text{(A.2.2)}$$

som direkte integreres til

$$N(x) = N_o e^{-n\sigma(v)x} \ . \qquad \text{(A.2.3)}$$

Denne N(x)-funktion er tegnet på Fig. A.2.3.

Da der er N(x)σ(v)ndx partikler, som bevæger sig netop stykket x ind i gassen, får vi for middelvejlængden

$$l_{\text{fri}} = \frac{\int_o^\infty xN(x)\sigma(v)ndx}{N_o}, \qquad \text{(A.2.4)}$$

som ved hjælp af (A.2.3) giver

$$l_{\text{fri}} = \frac{1}{n\sigma(v)}. \qquad \text{(A.2.5)}$$

Man skal være forsigtig med ukritisk at bruge den fri middelvejlængde som givet i ligning (A.2.5). Lad os betragte en gas, hvor partiklerne bevæger sig i deres termiske bevægelse og en gang imellem støder mod hinanden. En enkelt partikels bane består af en række rette liniestykker, hvis endepunkter ligger på de steder, hvor partiklen har stødt mod andre partikler. Det er klart, at l_{fri}, som givet i (A.2.5) repræsenterer middellængden af alle disse liniestykker.

Lad os nu lægge en tænkt plan ind i gassen og undersøge, hvor stor middelvejlængden er for de partikelbaner, der skærer gennem denne plan. Fra diskussionen ovenfor i forbindelse med Fig. (A.2.3) er det klart, at partiklerne efter at have passeret planen i gennemsnit trænger l_{fri} ind i gassen - de svarer jo helt til de N_0 partikler startende ved x = o, som vi betragtede ovenfor. Af symmetrigrunde må de partikler, der passerer planen, i middel også have bevæget sig l_{fri} siden sidste stød, før de nåede frem til planen. Alt i alt har de partikelbaner, der skærer gennem planen, så gennemsnitslængden 2 l_{fri}.

På tilsvarende måde kan man spørge om gennemsnitslængden af de baner, som alle gassens partikler er ved at tilbagelægge på et valgt tidspunkt, $t = t_o$. Fra dette tidspunkt vil partiklerne i middel tilbagelægge l_{fri}, inden de støder mod andre partikler. Af symmetrigrunde i tiden omkring t_o må partiklerne i middel også have tilbagelagt l_{fri}, siden deres sidste stød før t_o. Altså er middellængden af de banestykker, der er ved at blive gennemløbet ved $t = t_o$, også 2 l_{fri}.

Der er ikke noget paradoks i de to nævnte eksempler. I begge tilfælde udvælges fortrinsvis de lange banestykker. I tilfældet med planen er det klart, at det fortrinsvis er lange baner, der skærer planen. Tilsvarende er det i tilfældet med $t = t_o$ fortrinsvis de baner, som det varer længe at gennemløbe, altså igen de lange, der udvælges. Derfor må man også forvente at få resultater, der er større end l_{fri}.

APPENDIKS 3

Udledelse af Boltzmannligningen

Vi betragter fordelingsfunktionen f(s,t) = f(r,v,t) i det 6-dimensionale faserum **s** = (**r**,**v**). Da f er udtryk for sandsynlighedstætheden i faserummet, kan vi i et system med mange partikler opfatte den som partikeltætheden. Lad **u** = d**s**/dt være strømningshastigheden i faserummet af partiklerne, der befinder sig i differentialelementet, $d^6\mathbf{s}$, omkring **s**. Kontinuitetsligningen er da givet ved

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_s \cdot (\mathbf{u}f) + I = 0 \,, \tag{A.3.1}$$

hvor ∇_s står for divergensen over alle faserummets 6-dimensioner (**u** er en 6-dimensional vektor). I, der svarer til et kildeled, er udtryk for, at partikler momentant kan slås ud af differentialelementet ved stød mod partikler fra andre differentialelementer. Ved stød ændres rumkoordinaten ikke momentant, men det gør hastighedskoordinaten og dermed faserumskoordinaten. Partikler kan også stødes ind i det pågældende differentialelement ved stød mellem partikler fra to andre differentialelementer. Dette bidrag er også lagt ind under termen I. Da vi antager, at der hverken dannes eller forsvinder partikler indeholder I ikke egentlige kildeled.

Vi skal undersøge divergensledet nærmere.

$$\nabla_s \cdot (\mathbf{u}f) = \mathbf{u} \cdot \nabla_s f + f \nabla_s \cdot \mathbf{u}$$

$$= \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla_r f + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \nabla_v f + f \left(\nabla_r \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \nabla_v \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) . \tag{A.3.2}$$

d**r**/dt er hastigheden, **v**, af partiklerne i det betragtede differentialelement. **v** er et sæt af de uafhængige koordinater i faserummet og afhænger derfor ikke af de øvrige koordinater, **r**. Vi har da, idet $\partial v_i / \partial r_i = 0$

$$\nabla_r \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \nabla_r \cdot \mathbf{v} = 0 \,. \tag{A.3.3}$$

d**v**/dt er accelerationen af partiklerne, der skyldes kraftpåvirkningen fra plasmafelterne (ydre påtrykte samt kollektivt genererede felter). Vi har

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\mathbf{K}}{m} = \frac{q}{m}(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \,. \tag{A.3.4}$$

Det ses umiddelbart af (A.3.4), at kraftpåvirkningen i en given retning er uafhængig af hastigheden i den retning, og dermed at

$$\nabla_v \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \qquad \text{(A.3.5)}$$

Ligning (A.3.1) kan altså reduceres til

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \nabla_r f + \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \nabla_v f = -I \,. \qquad \text{(A.3.6)}$$

– I er ændringen i fordelingsfunktionen, der skyldes stød, hvorfor den ofte gives den mere illustrative betegnelse $(\partial f/\partial t)_{\text{stød}}$. Idet udtrykkene for dr/dt og dv/dt indføres, får ligning (A.3.1) formen

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \frac{q}{m}(\mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) \cdot \nabla_v f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{\text{stød}} . \qquad \text{(A.3.7)}$$

Dette er Boltzmannligningen, der eksakt beskriver udviklingen af fordelingsfunktionen, f, i et kendt felt, (**E**(**r**),**B**(**r**)).

Ligningen kan også udledes i generaliserede koordinater; dette kræver dog kendskab til Hammiltonformalisme. Antagelsen om mange partikler kan udelades ved i stedet at arbejde i et 6·N dimensionalt faserum, hvor N er antallet af partikler i gassen, og her betragte kontinuitetsligningen for et ensemble af systemer i dette faserum.

APPENDIKS 4

Momenter af Vlasovligningen

Vlasovligningen er givet ved:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f = 0 \,, \tag{A.4.1}$$

hvor partikelaccelerationen $\mathbf{a} = \mathbf{K}/m$. $\mathbf{K}$ er den resulterende kraft, der påvirker fluidpartiklerne i et givet fase-element, og m er deres masse. Det skal bemærkes her, at for de elektriske og magnetiske kræfter, vi betragter, er kraften i en given retning uafhængig af hastigheden i denne retning. Der gælder altså:

$$\frac{\partial a_i}{\partial v_i} = 0 \,. \tag{A.4.2}$$

Momenter af Vlasovligningen fås ved at integrere (A.4.1) med forskellige vægtninger, Q(**v**), over **v**-rummet.

$$\int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_r f + \mathbf{a} \cdot \nabla_v f \right) Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = 0 \,. \tag{A.4.3}$$

Før de enkelte led behandles, mindes der om, at integration og differentiation med hensyn til forskellige uafhængige variable kommuterer (kan ombyttes), hvis integraten er begrænset og integralet absolut konvergent. Det vil altid være tilfældet her, hvor integraten består af en fordelingsfunktion ganget med en vilkårlig potensfunktion, Q(**v**).

Behandling af ledet med tidslig differentiation:

$$\begin{aligned} I_t &= \int \frac{\partial}{\partial t} \{f(\mathbf{r},\mathbf{v},t)\} \, Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \\ &= \int \frac{\partial}{\partial t} \{f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) Q(\mathbf{v})\} \, d^3\mathbf{v} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int f(\mathbf{r},\mathbf{v},t) Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \{ n \langle Q(v) \rangle (\mathbf{r},t) \} \,. \end{aligned} \tag{A.4.4}$$

Bemærk, at middelværdien af Q(**v**) over **v**-rummet naturligvis er en funktion af **r** og t.

Behandling af ledet med rumlig differentiation:

$$
\begin{aligned}
I_r &= \int \mathbf{v} \cdot \nabla_r f Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \\
&= \int v_x \frac{\partial}{\partial x}\{f\} Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} + 2 \text{ analoge} \\
&= \int \frac{\partial}{\partial x}\{v_x\, f\, Q(\mathbf{v})\}\, d^3\mathbf{v} + 2 \text{ analoge} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\int v_x\, f\, Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v}\right\} + 2 \text{ analoge} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\{n\langle v_x\, Q(\mathbf{v})\rangle\} + 2 \text{ analoge} \\
&= \nabla_r \cdot \begin{pmatrix} n\langle v_x\ Q(\mathbf{v})\rangle \\ n\langle v_y\ Q(\mathbf{v})\rangle \\ n\langle v_z\ Q(\mathbf{v})\rangle \end{pmatrix} ,
\end{aligned}
$$

hvilket bekvemt skrives

$$
I_r = \nabla_r \cdot (n\langle \mathbf{v} Q(\mathbf{v})\rangle) . \qquad \text{(A.4.5)}
$$

Middelværdien af **v**Q(**v**) er også en funktion af **r** og t.

Behandling af ledet med hastighedsdifferentiation:

$$
\begin{aligned}
I_v &= \int \mathbf{a} \cdot \nabla_v f\, Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} \\
&= \int a_x \frac{\partial}{\partial v_x}\{f\}\, Q(\mathbf{v}) d^3\mathbf{v} + 2 \text{ analoge} \\
&= \int \left(\{a_x f\, Q(\mathbf{v})\}_{v_x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial}{\partial v_x}\{a_x\, Q(\mathbf{v})\}\, f\, dv_x \right) dv_y dv_z \\
&\quad +2 \text{ analoge} .
\end{aligned}
$$

Idet $\alpha_x f Q(v) \to 0$ for $v \to \infty$, og $\partial a_x/\partial v_x = 0$, fås for I_v

$$
\begin{aligned}
I_v &= -\int a_x \frac{\partial}{\partial v_x}\{Q(\mathbf{v})\} f\, d^3\mathbf{v} + 2 \text{ analoge} \\
&= -n\langle a_x \frac{\partial}{\partial v_x}\{Q(\mathbf{v})\} \\
&\quad + a_y \frac{\partial}{\partial v_y}\{Q(\mathbf{v})\} \\
&\quad + a_z \frac{\partial}{\partial v_z}\{Q(\mathbf{v})\} \rangle \,. \qquad \text{(A.4.6)}
\end{aligned}
$$

Ligning (A.4.3) kan herefter skrives

$$I_t + I_r + I_v = 0 \,. \qquad \text{(A.4.7)}$$

Som eksempel skal resultaterne benyttes med $Q(\mathbf{v}) = m\mathbf{v}$. Idet vi definerer fluidhastigheden,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{n}\int \mathbf{v}\, f\, d^3\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle \,,$$

fås af (A.4.4)

$$\mathbf{I}_t = m\frac{\partial}{\partial t}(n\,\mathbf{u}) \,. \qquad \text{(A.4.8)}$$

(A.4.5) giver

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}_r &= m\,\nabla_r \cdot (n\langle \mathbf{v}\ \ \mathbf{v} \rangle) \\
&= m(\nabla_r \cdot (n\langle \mathbf{v}\, v_x \rangle)\hat{x} \\
&\quad + \nabla_r \cdot (n\langle \mathbf{v}\, v_y \rangle)\hat{y} \\
&\quad + \nabla_r \cdot (n\langle \mathbf{v}\, v_z \rangle)\hat{z}) \,. \qquad \text{(A.4.9)}
\end{aligned}
$$

Endelig giver (A.4.6)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_v &= -nm\langle a_x \frac{\partial}{\partial v_x}\mathbf{v} + a_y \frac{\partial}{\partial v_y}\mathbf{v} + a_z \frac{\partial}{\partial v_z}\mathbf{v}\rangle \\ &= -nm\langle a_x \hat{x} + a_y \hat{y} + a_z \hat{z}\rangle \\ &= -n\langle \mathbf{K}\rangle \, . \end{aligned}$$

Idet $\mathbf{K} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$, har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_v &= -nq(\mathbf{E} + \langle \mathbf{v}\rangle \times \mathbf{B}) \\ &= -nq(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \, . \end{aligned} \qquad \text{(A.4.10)}$$

(A.4.3) giver altså med $Q(\mathbf{v}) = m\mathbf{v}$

$$m\frac{\partial}{\partial t}(n\mathbf{u}) + m\,\nabla_r \cdot (n\langle \mathbf{v}\,\mathbf{v}\rangle) - nq\,(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \, . \qquad \text{(A.4.11)}$$

Dette er momentligningen i fluidbeskrivelsen. Læseren kan selv på samme vis let udlede kontinuitets- og energiligningen ved benyttelse af (A.4.4) til (A.4.6).

APPENDIKS 5

Diffusion ved random walk

Vi skal her kort resumere de fysiske principper for diffusion ved at beregne diffusionskoefficienten for en simpel éndimensional diffusionsproces. Vi vælger at betragte en situation, som kan illustreres som vist på Fig. A.5.1. En

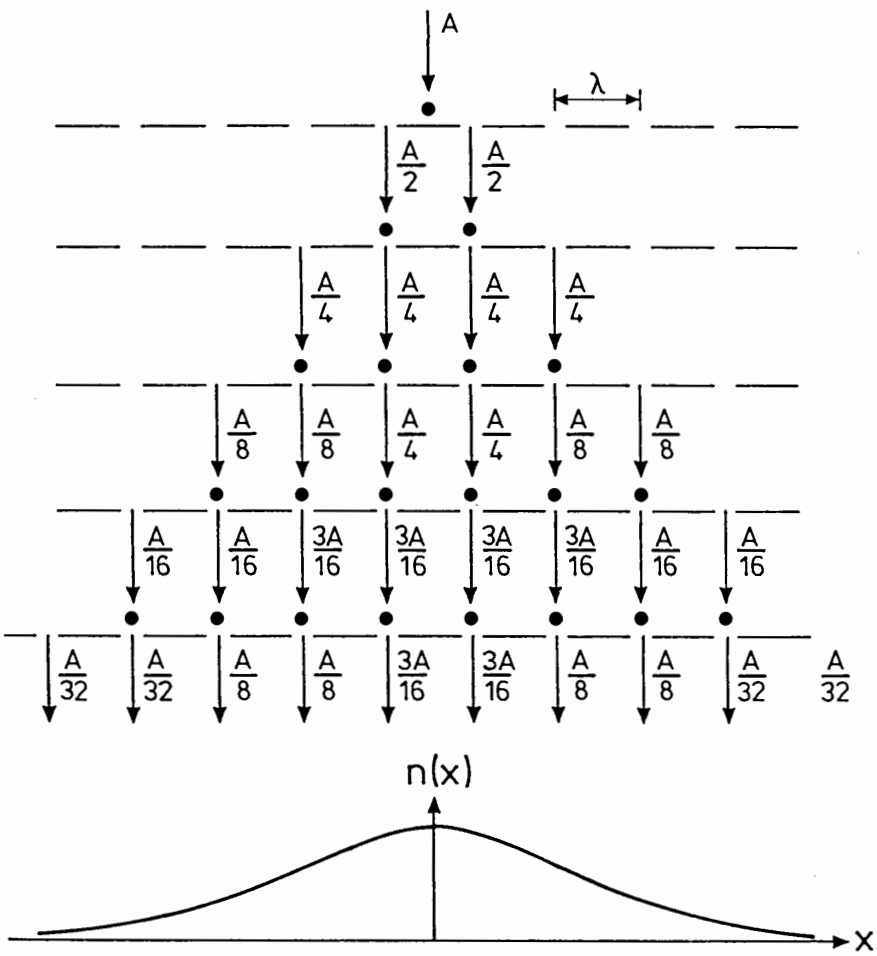

Fig. A.5.1. Éndimensional random walk diffusion.

samling på A partikler falder gennem en række dæk, hvori der er boret en række huller med den indbyrdes afstand λ. En partikel, der falder gennem et hul, hindres af en stoppind i at falde gennem det hul, der ligger lige under. Den bevæger sig et stykke λ enten til højre eller til venstre, før den falder gennem næste hul. Der er 50% sandsynlighed for, at den bevæger sig til

venstre og 50% for, at den bevæger sig til højre. Vi har altså en random walk proces med skridtlængden λ. Fordelingen af partikler, der passerer de forskellige huller i de fem øverste dæk, fremgår af figuren. Efter passage af mange dæk, N, kan fordelingen betragtes som kontinuert, og den får formen, som er vist nederst på figuren. Fordelingen beskrives ved funktionen

$$n(x,N) = \frac{A}{\sqrt{\pi N}} \exp\left\{-\frac{x^2}{N}\right\} , \qquad \text{(A.5.1)}$$

som også er skitseret på Fig. A.5.1.

Vi har altså her en situation, hvor partikler, der starter ved x = o, ved en random walk diffusionsproces udbreder sig langs x-aksen og dækker en større og større del af rummet. Bredden af fordelingen vokser proportionalt med $N^{½}$.

For at beregne diffusionskoefficienten ser vi på detaljerne omkring nogle få huller som vist på Fig. A.5.2. Vi betragter et område omkring et punkt x = x_o, hvor tætheden er faldende som antydet øverst på figuren under a). Under hullet A, der ligger ved x = x_o – λ/2, er tætheden i første tilnærmelse givet ved

$$n\left(x_o - \frac{\lambda}{2}\right) = n(x_o) - \frac{\lambda}{2}\frac{dn(x_o)}{dx} . \qquad \text{(A.5.2)}$$

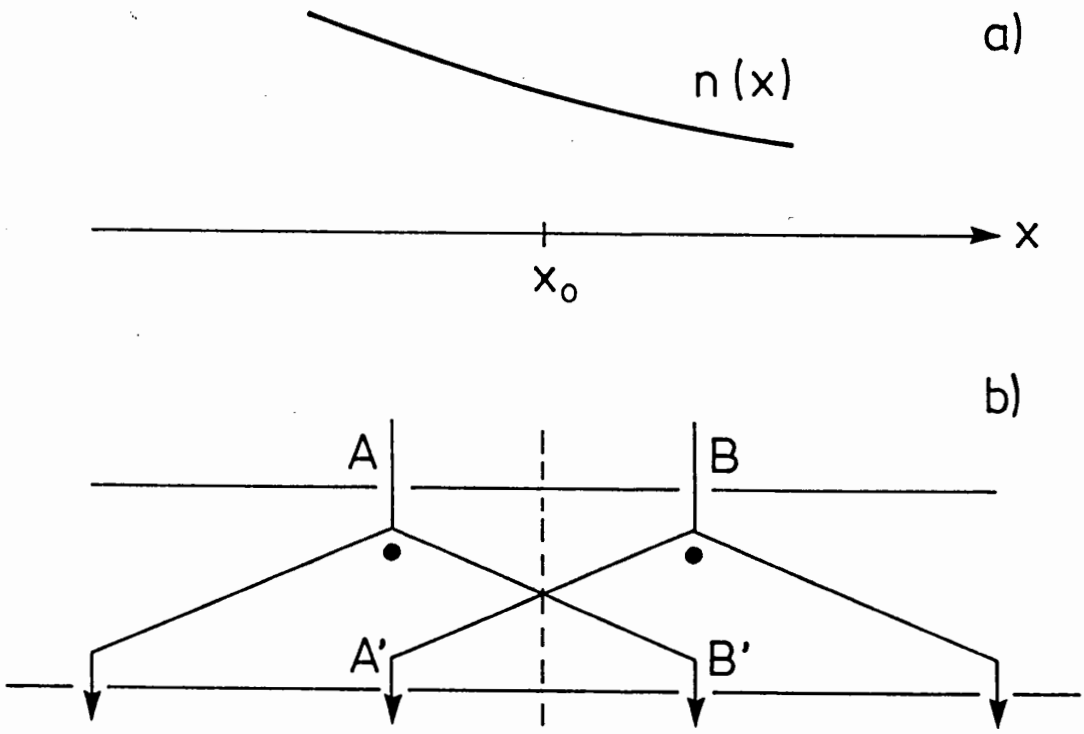

Fig. A.5.2. Transport i gas med tæthedsgradient der udsættes for random walk diffusion.

Halvdelen af disse partikler bevæger sig mod højre og falder senere gennem hullet B', medens den anden halvdel bevæger sig mod venstre. Tilsvarende finder vi for tætheden under hullet B, der ligger ved $x = x_0 + \lambda/2$,

$$n\left(x_o + \frac{\lambda}{2}\right) = n(x_o) + \frac{\lambda}{2}\frac{dn(x_o)}{dx} . \qquad \text{(A.5.3)}$$

Af disse partikler bevæger halvdelen sig mod venstre og vil senere falde gennem hullet A', medens den anden halvdel bevæger sig mod højre.

Lad T være den tid, der går fra en partikel passerer et hul, til den passerer det næste i det underliggende dæk. Stødfrekvensen for partiklernes afbøjninger bliver da $\nu = T^{-1}$, og partiklerne bevæger sig i $\pm$ x-retningen med farten $v = \lambda\nu = \lambda T^{-1}$.

Nettopartikelstrømmen, der pr. tidsenhed passerer en arealenhed af en væg lagt vinkelret på x-retningen ved $x = x_0$ (den lodrette punkterede linie på Fig. A.5.2,b), er

$$J_{x_o} = \frac{1}{2}n\left(x_o - \frac{\lambda}{2}\right)\frac{\lambda}{T} - \frac{1}{2}n\left(x_o + \frac{\lambda}{2}\right)\frac{\lambda}{T} , \qquad \text{(A.5.4)}$$

som ved hjælp af (A.5.2) og (A.5.3) bliver

$$J_{x_o} = -\frac{\lambda^2\nu}{2}\frac{dn(x_o)}{dx} . \qquad \text{(A.5.5)}$$

Ved brug af definitionsligningen for diffusionskoefficienten (6.1), der for vort éndimensionale problem bliver

$$J_x = nu_{\text{dif}} = -D\frac{dn}{dx} , \qquad \text{(A.5.6)}$$

fås

$$D = \frac{\lambda^2}{2}\nu = \frac{v^2}{2\nu} = \frac{\lambda v}{2} . \qquad \text{(A.5.7)}$$

Det fremgår af (A.5.7), at diffusionskoefficienten for det her behandlede éndimmensionale random walk diffusionsproblem er proportional med kvadratet på skridtlængden λ, og med stødfrekvensen ν.

Behandlingen af et mere realistisk random walk diffusionsproblem er meget mere omfattende end den behandling, der er gennemgået ovenfor. For sådanne behandlinger henvises til lærebøger om diffusionsproblemer f.eks. [15]. I sådanne behandlinger skal der bl.a. tages hensyn til

- problemet er tredimmensionalt, idet de difunderende partiklers bevægelser normalt har komponenter i alle tre retninger,

- de diffunderende partikler har ikke alle samme hastighed, men dækker et helt hastighedsspektrum, der ofte er det termiske spektrum,
- de enkelte skridt, en partikel tilbagelægger mellem to stød er ikke lige store, men dækker et helt spektrum. Se også diskusionen af fri middelvejlængder i Appendiks 2,
- stød mellem de diffunderende partikler og de partikler i baggrundsmaterialet, hvori diffusionen foregår, kan være retningsafhængige.

Ved behandlinger af random walk diffusionsprocesser, hvor man tager forhold som de ovenfor nævnte i betragtning, finder man imidlertid også, at diffusionskoefficienten er givet ved en talkonstant af størrelsesordenen én ganget med kvadratet på en middelskridtlængde samt med en stødfrekvens. I den fænomologiske handlingen af plasmadiffusion vinkelret på feltlinierne i magnetfelter i denne bog benyttes en diffusionskoefficient af formen

$$D = (\Delta r)^2 \cdot \nu \,, \qquad \text{(A.5.8)}$$

hvor Δr er længden af et karakteristisk skridt og ν den frekvens, hvormed disse skridt tages. Talkonstanten af størrelsesordenen én kan enten opfattes som indkorporeret i $(\Delta r)^2$ eller i ν eller den kan betragtes som negligeret; det sidste kan begrundes med, at vi kun er interesseret i en fænomenologisk behandling af problemet.

APPENDIKS 6

Formler og fundamentale fysiske konstanter

A.6.1. Nyttige formler fra vektoranalysen

I nedenstående formler er f og g skalarfunktioner, **A** og **B** er vektorfunktioner, og $\underline{\underline{T}}$ er en tensorfunktion. $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ og $\hat{\mathbf{z}}$ er enhedsvektorer i de tre koordinatretninger.

A.6.1.1. Vektorrelationer

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

$$= \begin{Vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{Vmatrix}$$

$$= (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\mathbf{x}} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\mathbf{y}} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = \mathbf{C}\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

$$\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = f\nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla f\cdot\mathbf{A}$$

$$\nabla\times(f\mathbf{A}) = \nabla f\times\mathbf{A} + f\nabla\times\mathbf{A}$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}$$

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$$

$$\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

A.6.1.2. Differentialoperatorer i specielle koordinatsystemer

a) Rektangulære koordinater

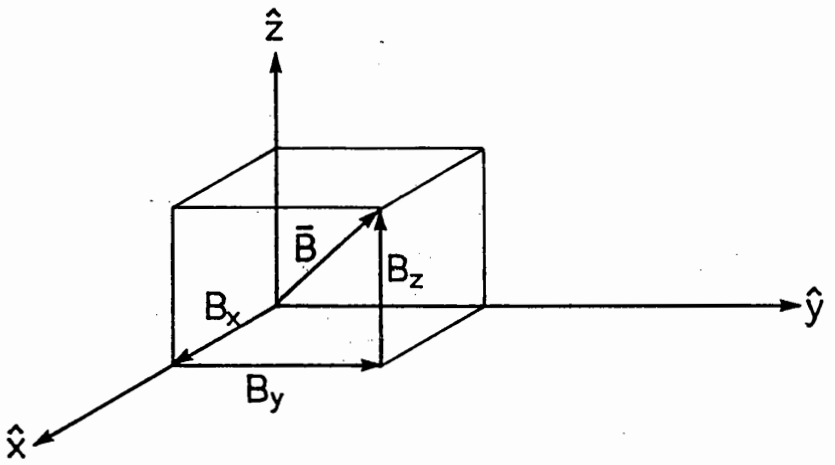

Fig. A.6.1. Rektangulært koordinatsystem. $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ *og* $\hat{\mathbf{z}}$ *er enhedsvektorer. Tegningen viser* **B***'s komponenter.*

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{Vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{Vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} =$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right\} \begin{Vmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{Vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}T_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}T_{yx} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zx}\right)\hat{\mathbf{x}}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}T_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}T_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zy}\right)\hat{\mathbf{y}}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}T_{xz} + \frac{\partial}{\partial y}T_{yz} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zz}\right)\hat{\mathbf{z}}$$

b) Cylinder koordinater

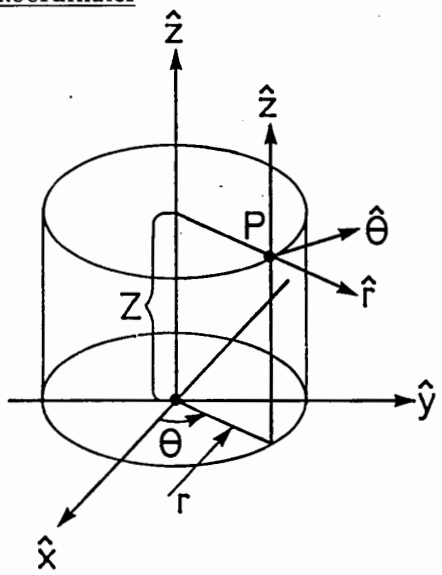

Fig. A.6.2. Cylinderkoordinatsystem med enhedsvektorerne $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\mathbf{z}}$.

Relationen mellem et punkt P's koordinater i det rektangulære ($\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$)-system og i cylindersystemet er

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$z = z.$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

$$+ \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r}\right)\hat{\theta}$$

$$+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right)\hat{\mathbf{z}}.$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\underline{\underline{T}} \\
&= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{rr}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}T_{\theta r} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zr} - \frac{1}{r}T_{\theta\theta}\right)\hat{\mathbf{r}} \\
&+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{r\theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}T_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z}T_{z\theta} + \frac{1}{r}T_{\theta r}\right)\hat{\theta} \\
&+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rT_{rz}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}T_{\theta z} + \frac{\partial}{\partial z}T_{zz}\right)\hat{\mathbf{z}}.
\end{aligned}$$

c) Sfæriske koordinater

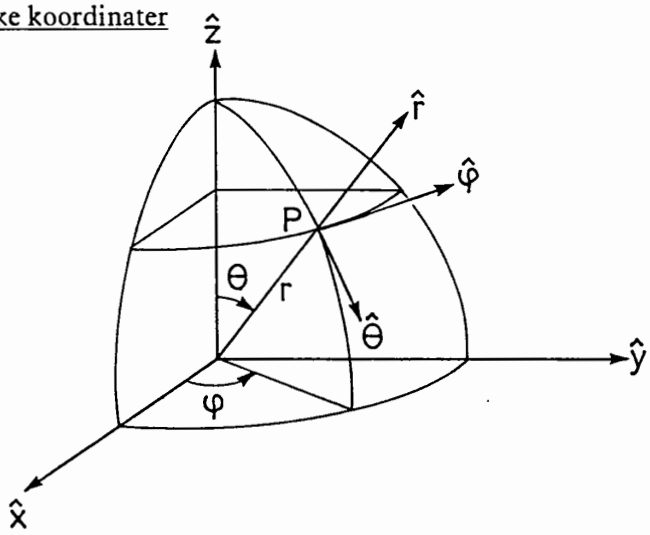

Fig. A.6.3. Sfærisk koordinatsystem med enhedsvektorerne $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$.

Relationen mellem et punkt P's koordinater i det rektangulære ($\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, $\hat{\mathbf{z}}$)-system og i det sfæriske system er

$$\begin{aligned}
x &= r\sin\theta\cos\phi \\
y &= r\sin\theta\sin\phi \\
z &= r\cos\theta.
\end{aligned}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi}.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta B_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi}$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta B_\phi) - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi}\right]\hat{\mathbf{r}} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rB_\phi)\right]\hat{\theta} \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rB_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta}\right]\hat{\phi}.\end{aligned}$$

$$\nabla^2 f =$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \underline{\underline{T}} &= \left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{rr}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(T_{\theta r}\sin\theta)\right. \\ &\left. + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}T_{\theta r} - \frac{1}{r}(T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi})\right\}\hat{\mathbf{r}} \\ &+ \left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(T_{\theta\theta}\sin\theta)\right. \\ &\left. + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}T_{\phi\theta} + \frac{1}{r}(T_{\theta r} - \cot\theta T_{\phi\phi})\right\}\hat{\theta} \\ &+ \left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 T_{r\phi}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(T_{\theta\phi}\sin\theta)\right. \\ &\left. + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}T_{\phi\phi} + \frac{1}{r}(T_{\phi r} - \cot\theta T_{\phi\theta})\right\}\hat{\phi}\end{aligned}$$

A.6.2. Fundamentale fysiske konstanter

Lysets hastighed i vakuum	$c = 2{,}998 \times 10^{8}$ m/s
Vakuums dielektricitetskonstant	$\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}$ F/m
	$[= \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}$ F/m]
Vakuums permeabilitet	$\mu_0 = 1{,}257 \times 10^{-6}$ H/m
	$[= 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m]
Planck's konstant	$h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ J·s
Boltzmann's konstant	$\kappa = 1{,}381 \times 10^{-23}$ J/K
Avogadros tal	$N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ mol^{-1}
Bohr radius	$a_0 = 5{,}292 \times 10^{-11}$ m
Gaskonstanten	$R = 8{,}314$ J/K·mol
Elektronmassen	$m_e = 9{,}109 \times 10^{-31}$ kg
Protonmassen	$m_p = 1{,}673 \times 10^{-27}$ kg
Neutronmassen	$m_n = 1{,}675 \times 10^{-27}$ kg
Masseforhold	$m_p/m_e = 1836$
Elementarladningen	$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C
Elektronladningen	$-e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C

Stikordsregister

Side

Adiabatiske invarianter 49-58
magnetisk moment 49-54
longitudinale invariant 54-55
fluxinvariant 56-57
Adiabatiske ligninger 81
Adiabatisk opvarmning 58
Afbøjningsvinkel 31
Antænding 13-18
Aspektforhold & inverst- 94
Atomkraftværker konventionelle 2

Bananbane 151
Bananområde 153-155
Bennett-profilen 110-112
Bevægelsesligning 39
løsninger af 40-49
Bevægelsesmængdeudveksling 70
Boltzmanligningen 59-63, 172-173
Bremsestrålingstab 14
Brintbomber 3
Bølgeenergi 1

CO_2-forurening 2
Coulombkollisioner 67
Coulombkræfter 5
Coulomblogaritmen 32
Coulombstød 30-32
Cyklotronradius 42
-stråling 40

Debyelængde 25-30
Deuteriumforekomster 3
Diamagnetisme, plasmas 50, 86-90
Diffusion 15, 128-159, 178-181
ambipolar 153
Bohm 157-159
klassisk 130-144
koefficient 129
neoklassisk 152-157
ligning 129
random walk 129, 178-181
turbulent 129, 157-159

Side

Driftbevægelse **K × B** 44, 49, 56, 148-152
∇B 44-47
E × B 42-44, 49, 57
Drifthastighed 42-49, 56, 148-152
Drivhuseffekt 2

Effekt tabs 15
tætheder 11-18
Effektivitet varme-elektricitet 14
Energiligning 68-70
Energi forbrug 1
forsyningssikkerhed 1
fri 5
havvand 3
indeslutningstid 15, 18
reserver 1
strøm, solen 2
tab 7, 14-18
økonomi 1

Faseelement, faserum 60-62, 172-173
Fluidligningerne 66-83
Fluidhastighed 129, 137
Fluxflader 97
Fluxfladestørrelser 99-100
Fluxsving 95
Fordelingsfunktion 9, 59-64, 162-167, 172-173
Fossile brændstoffer 1
Fusionsenergi 2
Fusion middelvejlængde for 33
processer 4
reaktor 2, 20-21
tværsnit 5

Grad-Shafranov-forskydningen 125
Guiding center 42
Gyldighedsområde, ideal MHD 82
Gyrocenterspring 131-134
Gyrofrekvens 36, 42
Gyroradius 33, 42

Halleffekt 80

Ideal MHD 71-83
Impulsudveksling ved stød 74
Ionisering 7
grad 22-23
energi 22

JET 19, 125
Jordvarme 1

Kernekræfter 5
Kollisionsfrekvenser 36-37
Kollisionsproces 168-171
Kontinuitetsligningen 68-73
Konvektion 129
Kul 1

Laminar strømning 129
Larmorfrekvens 42
Larmorradius 42
Lawson-kriteriet 13-16
Ledecenter 42
Ligevægt 84, 96-127

Magnetfeltlinierør 97
Magnetfelt polært 93
toroidalt 93
vertikalt 93
Magnetfelttræk/tryk, koncept om 111-114
Magnetiseringen 50
Magnetohydrodynamik, ideal 71-83
ligninger for 83
Massestrømningshastigheden 71
Massetal 3
Maxwell-fordeling 9, 162-167
Maxwell-ligningerne 64, 73
Middelafstand mellem partikler 25
Middelbindingsenergi 3
Middelenergi, /partikel/frihedsgrad 50, 166
Middelvejlængde fri 31-32, 170-171
Modstand specifik 81, 138-142
Momentligning 68, 70, 174-177

Naturgas 1
Notation for plasma med cirkulært tværsnit 93
Nukleon 3

Olie 1
Ohms lov, generaliseret 72, 80

Partikel, bunden, fri 147-152
Partikelbevaring 67
Pfirsch-Schlüter område 153, 155-157
Plasma begrebet 7, 22
degenereret 23
elongeret 125
frekvens 34
indeslutningstid 91, 107
parametre 24-38
relativistisk 23
strøm 93-124
tværsnit 125-127

Plasmaligningerne, koblinger imellem 65
Plasmapotential dæmpning af 27
Plateauområde 153-157
Poloidalt β 118
Potentialbrønd 26
Profil Bennett 110
eksperimentel, karakteristisk 143
Pølseinstabiliteten 115

Random walk 128, 178-181
Reaktionshastighed 8-13, 169
Reaktionstværsnit 6, 168-169
Rekombination 22
RF-opvarmning 20
RFP (Reversed Field Pinch) 121
Rotationstransformationen 98
Rumladningstæthed 65

Saha-ligningen 22
Sausage instability 115
Sikkerhedsfaktor, q 94-95
Skifferolieforekomster 1
Skruepinch 116-124
stabilitetsvurderinger for 121
Solenergi 1
Spejlmaskine 49-54
Spejlforhold, magnetisk 54, 146
Stabilitet 84
Stabilitetsvurderinger 114-125
Stellaratorkonfiguration 95-96
Strømningshastighed 68-71
Stødparameter 31, 168
Synkrotronstråling 40

Tabskonus 54
Termisk gas 9, 164-167
Termonukleart princip 7
The hoop force 100
θ-pinch 107
Tjernobyl 2
Tjæresand 1
To-fluidligningerne 70
Tokamak 19, 92-95
Toroidalt system 90-106
Tritium 3
Tryk partial- 12
tensor 68, 73-80
statisk 69, 72
anisotropt 69
totalt 74

Side

Trykbalance 96-123
θ-pinch 109
z-pinch 110
skrue-pinch 117
Tunneleffekt 5

U^{235} 2
U^{238} 2

Varmeflux pga. tilfældig bevægelse 69
Varmegenerering ved stød 70
Vindkraft 1
Vlasovligningerne 63, 174

Z-pinch 109-116

Bibliographic Data Sheet **Risø-M-2743**

Title and authors

Fusionsplasmaphysics

Vagn O. Jensen

ISBN 87-550-1461-5

ISSN 0418-6435

Dept. or group: Physics Department

Date: September 1989

Groups own reg. number(s)

Project/contract no.

Pages	Tables	Illustrations	References
203		58	15

Abstract (Max. 2000 characters)

Fusion Energy. Definition of plasma. Single-particle motion in electric and magnetic fields. Plasma as a fluid. Equilibrium and stability for toroidal systems, treated in the ideal MHD-description. Plasma diffusion.

Descriptors INIS/EDB

DIFFUSION; MAGNETOHYDRODYNAMICS; MANUALS; PLASMA; PLASMA FLUID EQUATIONS; THERMONUCLEAR REACTIONS; TOROIDAL CONFIGURATION

Available on request from Risø Library, Risø National Laboratory, (Risø Bibliotek, Forskningscenter Risø), P.O.Box 49, DK-4000 Roskilde, Denmark. Telephone + 45 42 37 12 12, ext. 2268/2269, Telex 43 116, Telefax + 45 46 75 56 27.